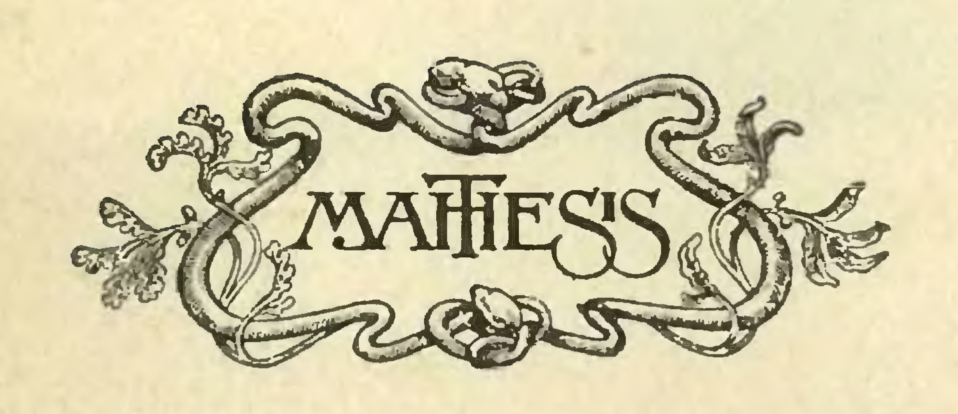
БИБЛІОТЕКА ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ
подъ общей редакціей приватъ-доцента С. О. ШАТУНОВСКАГО
3

Е. ФУРРЕ

ГЕОМЕТРИЧЕСКІЕ ГОЛОВОЛОМКИ и ПАРАЛОГИЗМЫ

Переводъ съ французскаго
К. И. БАКОВОЙ

Съ 82 фигурами въ текстѣ



ОДЕССА
1912



ОДЕССА.
Типографія „Техникъ“, Екатерининская, 58.
1912.

ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ ГОЛОВОЛОМКИ

Геометрическую головоломку, въ наиболѣе общемъ смыслѣ этого слова, можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ: *дано опредѣленное число геометрическихъ фигуръ, требуется разрѣзать ихъ на части такъ, чтобы изъ полученныхъ элементовъ можно было составлять фигуры, имѣющія заданныя формы*.

Подобные вопросы, какъ мы увидимъ, встрѣчались въ глубокой древности, но только въ XIX-омъ вѣкѣ было найдено ихъ общее рѣшеніе. Въ нашемъ изложеніи мы будемъ, насколько возможно, придерживаться хронологическаго порядка.

§ 1. — Loculus Архимеда (3-ій в. до Р. X.).

Мы знаемъ изъ указаній двухъ латинскихъ авторовъ — Марія Викторина (Marius Victorinus) (4-ый в.) и Атилія Фортунаціана (Atilius Fortunatianus) (6-ой в.), что Архимедъ придумалъ одну геометрическую игру. Они сообщаютъ, что эта игра, названная ими *Loculus Архимеда*, *состояла въ слѣдующемъ: данъ квадратъ изъ слоновой кости, разрѣзанный на 14 многоугольниковъ различной формы; изъ этихъ кусковъ требуется составить не только первоначальный квадратъ, но также и другія фигуры.*

Авзоній (Ausone) (4-ый в.) въ письмѣ къ Павлу (Paulus) упоминаетъ объ этой игрѣ, не приписывая ея, однако, Архимеду.

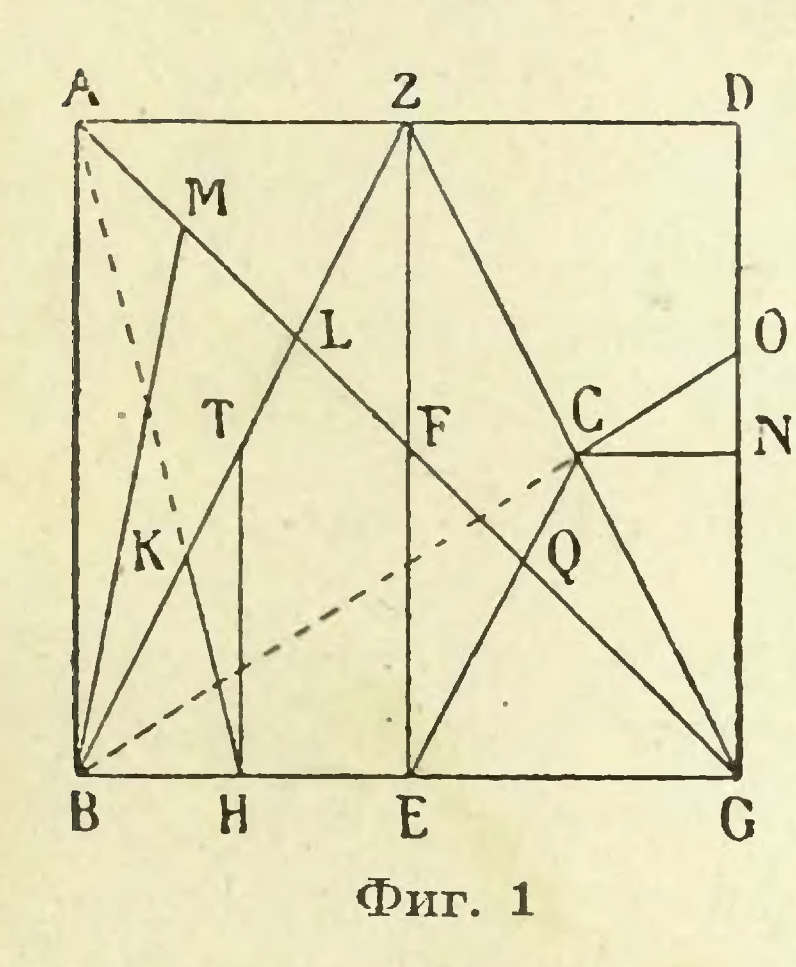
Этотъ вопросъ не былъ вполнѣ выясненъ до 1899 года, когда Генрихъ Зютеръ изъ Цюриха нашелъ арабскую версію книги Архимеда по этому вопросу. Въ этой книгѣ великій геометръ ставитъ себѣ задачу *разрѣзать квадратъ на 14 частей, площади которыхъ находились бы въ раціональныхъ отношеніяхъ къ площади всей фигуры*, которую онъ называетъ

„синтемахіонъ“ (собраніе обрѣзковъ). Задача Архимеда, слѣдовательно, обратна той, которую ему приписали латинскіе авторы; она болѣе научна, какъ этого и слѣдовало ожидать; игра же, о которой они упоминаютъ, несомнѣнно, была придумана подъ вліяніемъ труда сиракузскаго ученаго.

Отсюда, повидимому, и произошли геометрическія головоломки.

Задача допускаетъ безчисленное множество рѣшеній; мы приведемъ лишь рѣшеніе Архимеда.

Построеніе. — Пусть ABGD будетъ данный квадратъ, а точки E, N, Z — середины сторонъ GB, GD и DA. Проведемъ прямыя ZE, ZB, ZG и AG. Прямая AG пересѣкается въ точкахъ L и F съ прямыми ZB и ZE. Соединимъ точку B съ серединой M отрѣзка AL, точку E съ серединой C отрѣзка ZG и точку C съ точкой N. Наконецъ, на прямой, проходящей черезъ середину H отрѣзка BE и черезъ точку A, возьмемъ отрѣзокъ HK, ограниченный прямой ZB; черезъ точку H и черезъ середину T прямой BZ проведемъ прямую HT; на прямой, проходящей черезъ точки C и B, возьмемъ отрѣзокъ CO, ограниченный прямыми ZG и DG.



Фиг. 1

Квадратъ ABGD раздѣлится на 14 частей, изъ которыхъ 7 находятся въ прямоугольникѣ ZB и 7 — въ прямоугольникѣ ZG, и всѣ эти части, какъ мы это покажемъ, удовлетворяютъ поставленнымъ требованіямъ.

Величина частей. — Обозначимъ буквой S площадь всего квадрата.

I. *Прямоугольникъ* ZG. — 1^0 $\triangle GNC = {}^1/_4 \triangle DGZ = {}^1/_{16} S$.

2^0 Такъ какъ $BG = 4CN$, то $OG = 4ON$, $NG = 3ON$; слѣдовательно, $\triangle CNO = {}^1/_3 \triangle GNC = {}^1/_{48} S$.

3^0 Площадь четыреугольника $DOCZ = \triangle DGZ - (\triangle GNC + \triangle CNO) = {}^1/_4 S - ({}^1/_{16} + {}^1/_{48}) S = {}^1/_6 S$.

4^0, 5^0, 6^0 $\triangle$ EFQ $= {}^1/_{24}$ S, $\triangle$ GCQ $= {}^1/_{24}$ S и $\triangle$ EGQ $= {}^1/_{12}$ S. Дѣйствительно, изъ подобія треугольниковъ FCQ и GEQ вытекаетъ: $\frac{FC}{EG} = {}^1/_2 = \frac{CQ}{EQ} = \frac{EQ}{GQ}$; слѣдовательно, $\triangle$ EFQ $= {}^1/_2$ $\triangle$ EGQ $= \triangle$ GCQ, $\triangle$ EFQ $= {}^1/_3$ $\triangle$ EFG. Но $\triangle$ EFG $= {}^1/_2$ $\triangle$ ZEG $= {}^1/_8$ S; слѣдовательно, $\triangle$ EFQ $= \triangle$ GCQ $= {}^1/_{24}$ S и $\triangle$ EGQ $= {}^1/_{12}$ S.

7^0 Площадь четыреугольника FQCZ $= \triangle$ ZEC $- \triangle$ EFQ $= {}^1/_8$ S $- {}^1/_{24}$ S $= {}^1/_{12}$ S.

II. *Прямоугольникъ* ZB. — 1^0 $\triangle$ FZL $= \triangle$ EFQ $= \triangle$ ${}^1/_{24}$ S.

2^0 $\triangle$ KHT $= {}^1/_{48}$ S. Дѣйствительно, изъ подобія треугольниковъ KHT и KBA вытекаетъ: $\frac{HT}{BA} = {}^1/_2 = \frac{KT}{BK}$; слѣдовательно, $\triangle$ KHT $= {}^1/_2$ $\triangle$ BHK $= {}^1/_3$ $\triangle$ BHT $= {}^1/_{12}$ $\triangle$ ZEB $= {}^1/_{48}$ S.

3^0 $\triangle$ BHK $= 2$ $\triangle$ KHT $= {}^1/_{24}$ S.

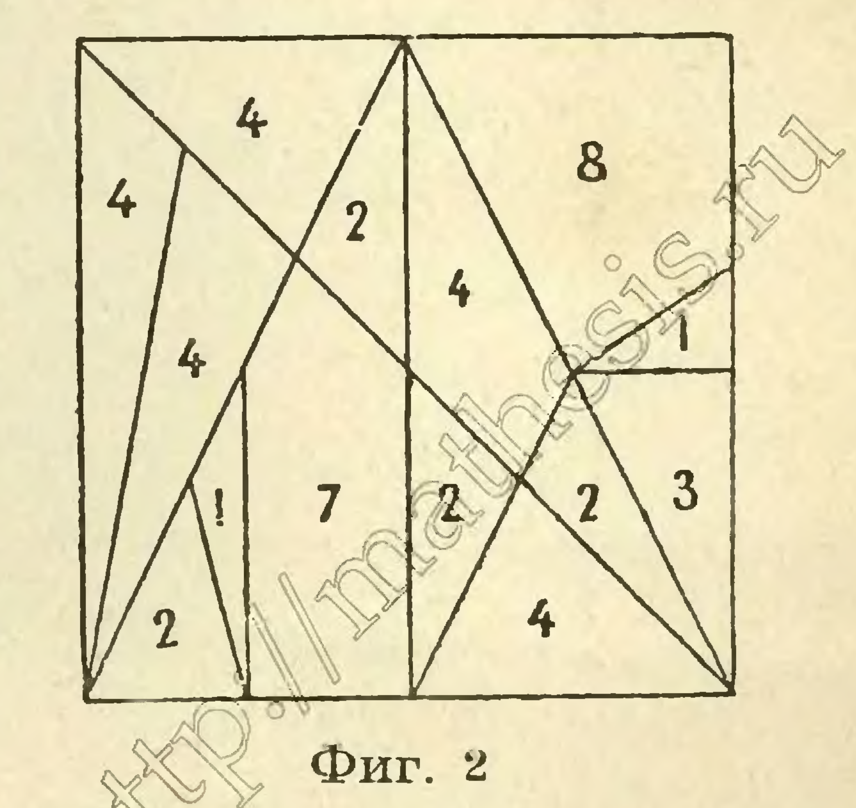
4^0 $\triangle$ ALZ $= {}^1/_{12}$ S, такъ какъ треугольники ALZ и EGQ равны.

5^0, 6^0 $\triangle$ ABM $= \triangle$ LBM $= {}^1/_{12}$ S; дѣйствительно, такъ какъ BG $=$ 2AZ, то BL $=$ 2LZ и $\triangle$ LAB $= 2$ $\triangle$ ALZ $= {}^1/_6$ S; поэтому $\triangle$ ABM $= \triangle$ LBM $= {}^1/_2$ $\triangle$ LAB $= {}^1/_{12}$ S.

7^0 Площадь пятиугольника LFEHT $=$ площади трапеціи ZEHT $- \triangle$ FZL $= {}^3/_4$ $\triangle$ BEZ $- \triangle$ FZL $= {}^3/_{16}$ S $- {}^1/_{24}$ S $= {}^7/_{48}$ S.

Фиг. 2 показываетъ величины площадей отдѣльныхъ частей въ сорокъ восьмыхъ доляхъ всей площади.

Замѣчаніе. — Приведенное построеніе и полученные результаты дѣйствительны для любого параллелограмма.

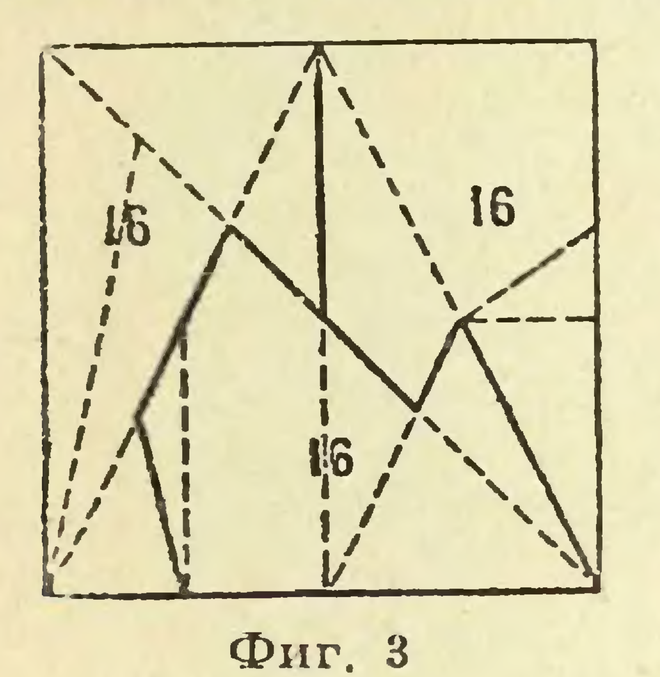


Фиг. 2

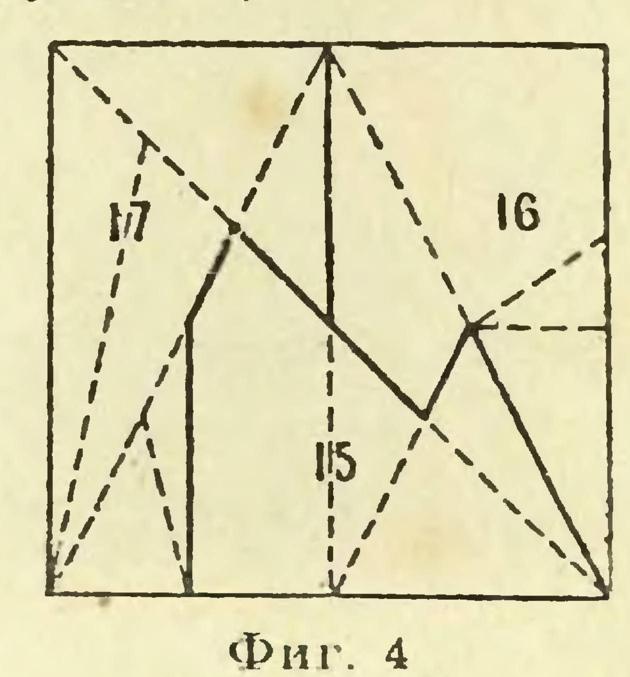
Примѣненія. — Относительно элементовъ „loculus“ можно ставить различныя задачи. Приведемъ одинъ примѣръ — предполагая, что площади выражены въ сорокъ восьмыхъ доляхъ всего квадрата.

Сгруппировать элементы этой фигуры такъ, чтобы пло-

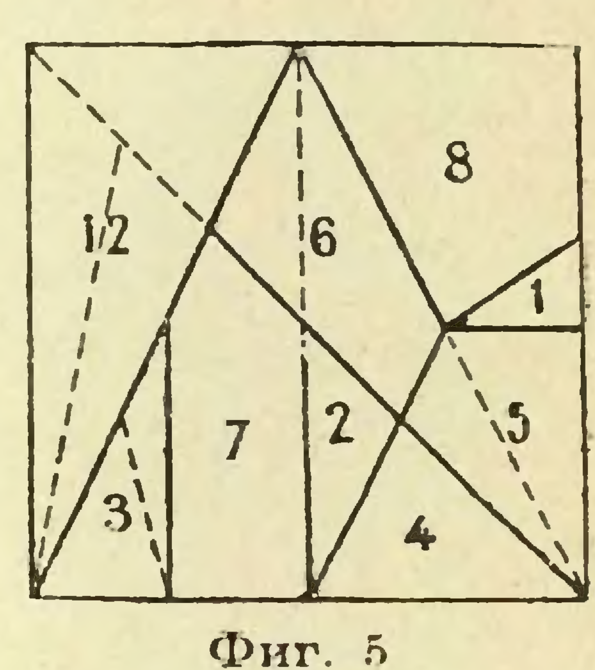
щади вновь полученныхъ частей выражались тремя равными цѣлыми числами (фиг. 3), или тремя послѣдовательными цѣлыми числами (фиг. 4), или восьмью первыми цѣлыми числами и числомъ 12 (фиг. 5).



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

БИБЛІОГРАФІЯ.

H. Süter. — *Der Loculus Archimedius oder das Syntemachion des Archimedes.* — Zeitschr. für Math. u. Phys. Leipzig, 1899.

§ 2.—Сложеніе квадрата изъ равныхъ квадратовъ. Разложеніе квадрата на равные квадраты.

Геометрическое рѣшеніе задачи о построеніи стороны квадрата, равновеликаго нѣсколькимъ равнымъ квадратамъ, оказывается очень простымъ: достаточно примѣнить послѣдовательно столько разъ, сколько это окажется необходимымъ, построеніе, вытекающее изъ теоремы Пиѳагора.

Но вопросъ становится болѣе труднымъ, если хотятъ, какъ это мы и сдѣлаемъ, *составить матеріальный квадратъ изъ элементарныхъ равныхъ между собою квадратовъ* (которыми могутъ быть, напримѣръ, глиняныя плитки), при чемъ эти послѣдніе можно дѣлить на части.

При разложеніи квадрата на нѣсколько равныхъ квадратовъ могутъ быть сдѣланы аналогичныя замѣчанія.

I. Рѣшеніе Абу̂'ль Уафâ (Aboûl Wafâ) (10-ый в.).—Эта задача—одна изъ тѣхъ, которыя должны были встрѣтиться арабамъ при архитектурныхъ работахъ; практическая необходимость привела Абу̂'ль Уафâ къ теоретическому изслѣдованію

вопроса въ его *Сборникѣ геометрическихъ построеній.* Въ этой послѣдней работѣ, дѣйствительно, говорится о томъ, что цѣль автора — замѣнить несовершенные пріемы практиковъ методомъ, основаннымъ на научныхъ принципахъ.

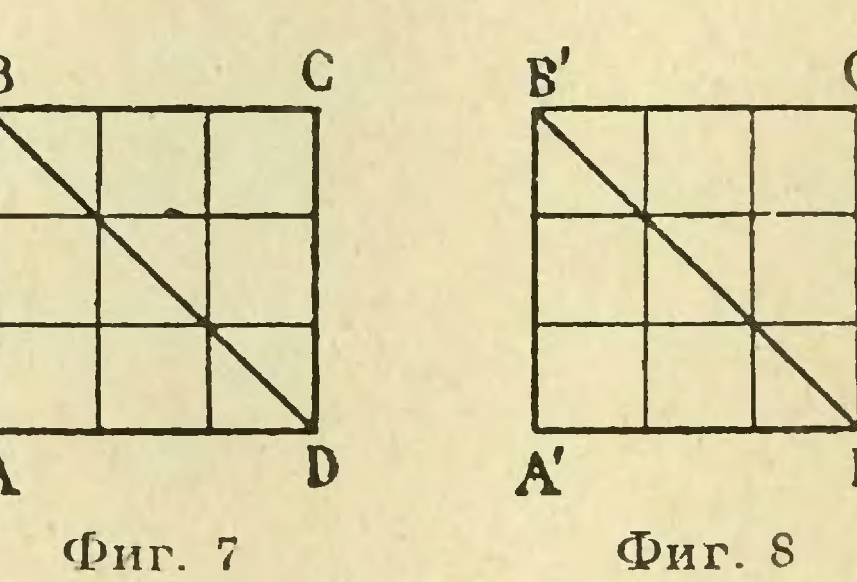
Абу'ль Уафâ основываетъ свое рѣшеніе на ариѳметическомъ свойствѣ цѣлаго числа n, указывающаго, сколько берется равныхъ квадратовъ. Онъ различаетъ слѣдующіе два основныхъ случая; 1^0 число n есть квадратъ или сумма двухъ квадратовъ; 2^0 n не есть ни то ни другое.

1-ый случай. Цѣлое число n есть квадратъ a^2 или сумма двухъ квадратовъ a^2 и b^2.

Составить квадратъ изъ a^2 квадратовъ. — Сторона AB искомаго квадрата равна a; фигура 6 даетъ построеніе для случая $a^2 = 3^2$.

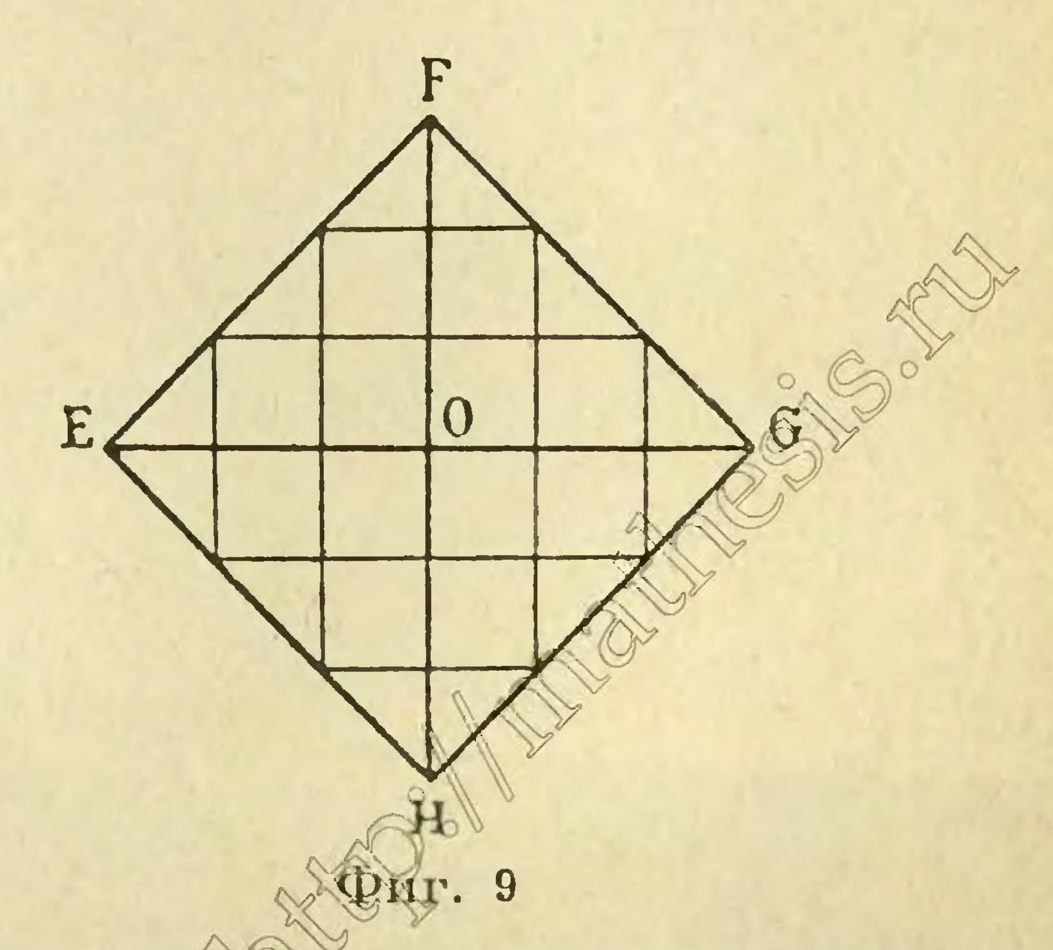
Фиг. 6

Разложить квадратъ на a^2 квадратовъ. — Для этого достаточно раздѣлить двѣ смежныя стороны AB и BC квадрата на a равныхъ частей и провести прямыя, параллельныя этимъ сторонамъ черезъ точки дѣленія; на фигурѣ 6 приведено постороеніе для $a^2 = 3^2$.



Фиг. 7 Фиг. 8

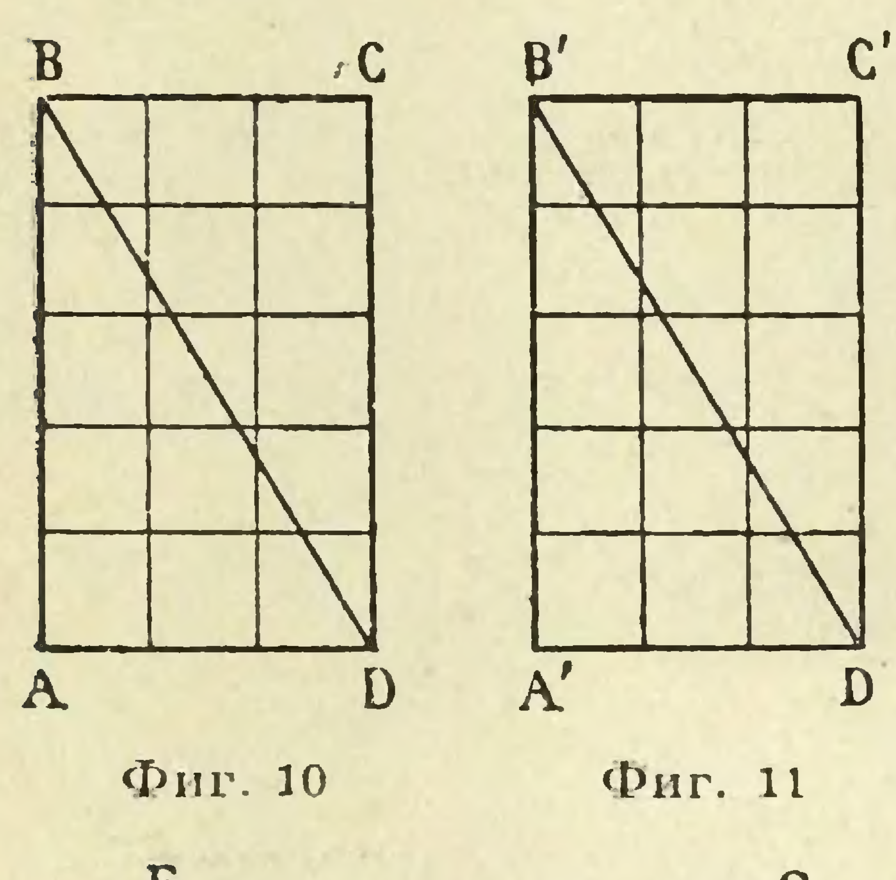
Составить квадратъ изъ $2a^2$ квадратовъ. — При помощи предыдущей задачи нужно сначала построить два квадрата ABCD и A'B'C'D', состоящіе каждый изъ a^2 элементарныхъ квадратовъ (фиг. 7 и 8). Затѣмъ надо раздѣлить каждый изъ составленныхъ такимъ образомъ квадратовъ діагональю и сложить полученные четыре прямоугольныхъ треугольника такъ, чтобы вершины прямыхъ



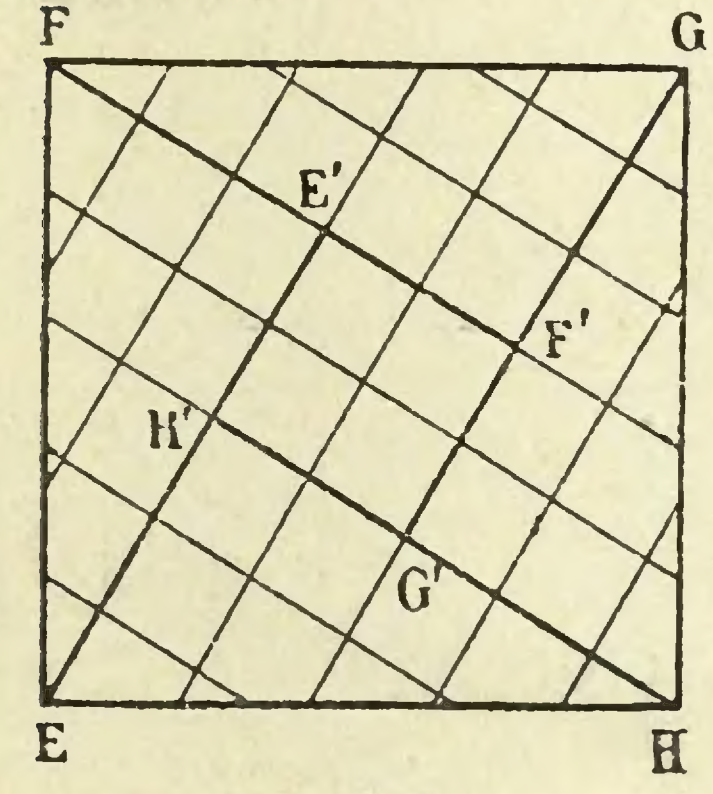
Фиг. 9

угловъ совпали въ одной точкѣ O; тогда они составятъ квадратъ EFGH (фиг. 9).

Разложить квадратъ на $2a^2$ равныхъ квадратовъ.—Рѣшеніе обратно предшествующему; равнобедренные прямоугольные треугольники, расположенные по периферіи квадрата EFGH, будучи соединены попарно, образуютъ квадратныя элементы (фиг. 7 и 8).



Фиг. 10 Фиг. 11



Фиг. 12

Составить квадратъ изъ a^2+b^2 равныхъ квадратовъ ($a>b$). Построимъ (фиг. 10 и 11) два прямоугольника ABCD и A′B′C′D′, стороны которыхъ соотвѣтственно равны a и b разъ взятой сторонѣ элементарнаго квадрата, затѣмъ раздѣлимъ каждый изъ прямоугольниковъ діагональю на два прямоугольныхъ треугольника, гипотенузы которыхъ и будутъ сторонами искомаго квадрата.

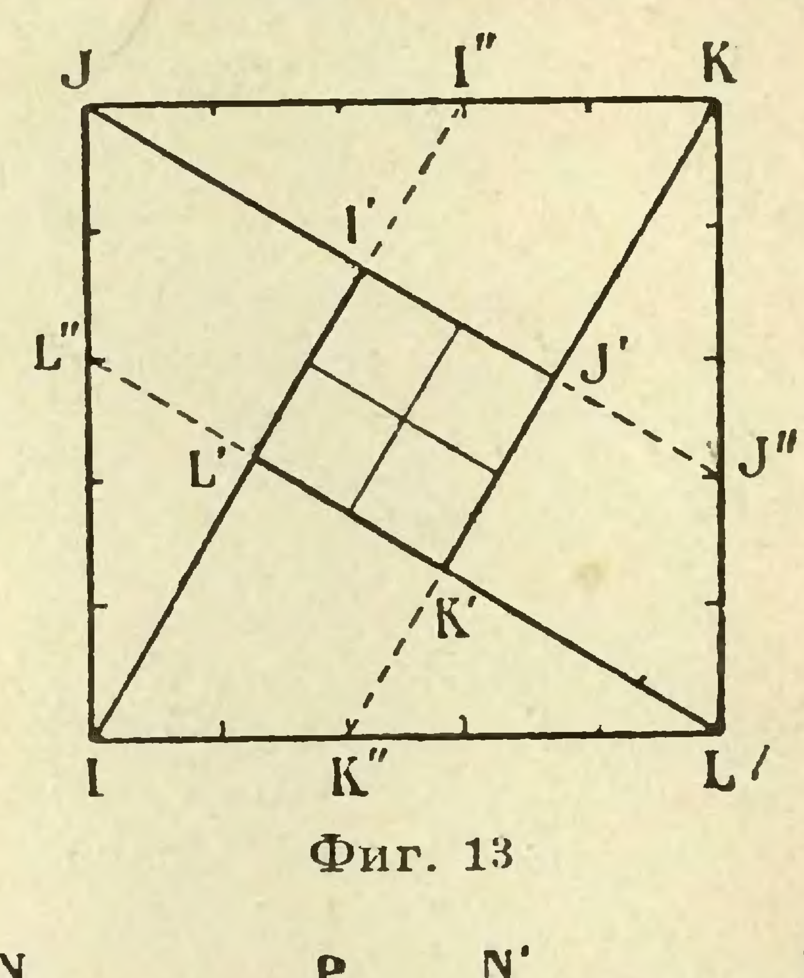
Располагая эти треугольники, какъ указано, мы получимъ квадратъ EFGH; на фиг. 10, 11 и 12 мы предполагаемъ, что $a=5$, $b=3$. Этотъ способъ основанъ на соотношеніи

$$a^2+b^2=4\frac{ab}{2}+(a-b)^2.$$

Весь квадратъ a^2+b^2 (EFGH) составленъ изъ 4-хъ треугольниковъ (EE′F, FF′G,...), площади которыхъ равны $\frac{ab}{2}$, и изъ центральнаго квадрата (E′F′G′H′) со стороной $a-b$.

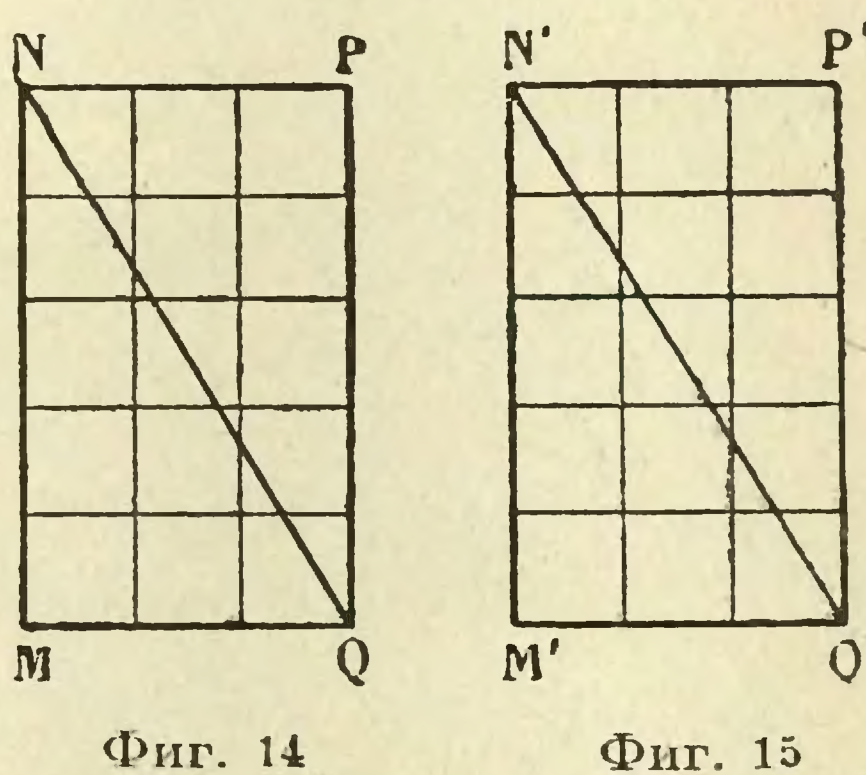
Разложить квадратъ на a^2+b^2 равныхъ квадратовъ ($a>b$).—Построеніе обратно предыдущему; оно основывается на томъ, что на фиг. 12 сѣкущія прямыя раздѣляютъ стороны

квадрата на $a = 5$ равныхъ частей; такъ какъ прямая EE′, напримѣръ, раздѣлена на 5 равныхъ частей, то и сторона EF также раздѣлена на 5 равныхъ частей.



Фиг. 13

Итакъ, пусть будетъ данъ квадратъ IJKL (фиг. 13); мы дѣлимъ его стороны на a равныхъ частей. Обозначимъ черезъ L″, I″, J″, K″ $(a - b)$-ую точку дѣленія каждой изъ сторонъ, считая отъ вершинъ I, J, K, L въ направленіи IJKL; соединяя точку I съ I″, J съ J″, K съ K″, L съ L″, получаемъ четыре треугольника II′J, JJ′K,... и центральный квадратъ I′J′K′L′. Располагаемъ эти треугольники попарно такъ, чтобы получились два равныхъ прямоугольника MNPQ и M′N′P′Q′; дѣлимъ стороны MN и M′N′, NP и N′P′ этихъ прямоугольниковъ соотвѣтственно на a и b равныхъ частей и прямыми, проведенными черезъ точки дѣленія параллельно другимъ сторонамъ, разбиваемъ каждый изъ прямоугольниковъ на ab квадратовъ. Остается только раздѣлить центральный квадратъ I′J′K′L′ на $(a - b)^2$ квадратовъ.

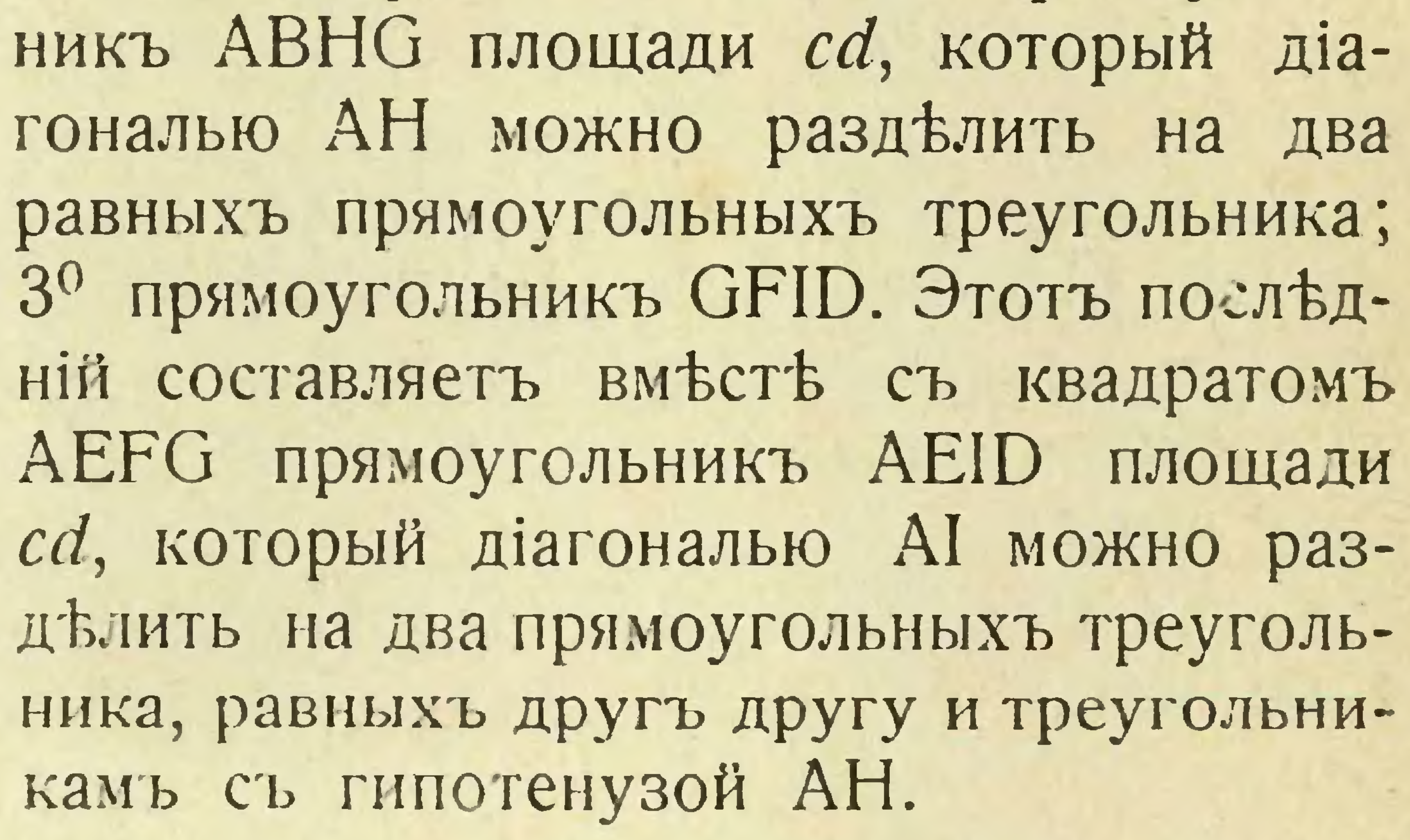


Фиг. 14 Фиг. 15

2-й случай. Цѣлое число n не есть ни квадратъ ни сумма двухъ квадратовъ. Мы разсмотримъ сначала два вспомогательныхъ предложенія, къ которымъ, какъ увидимъ дальше, приводится предложенная задача.

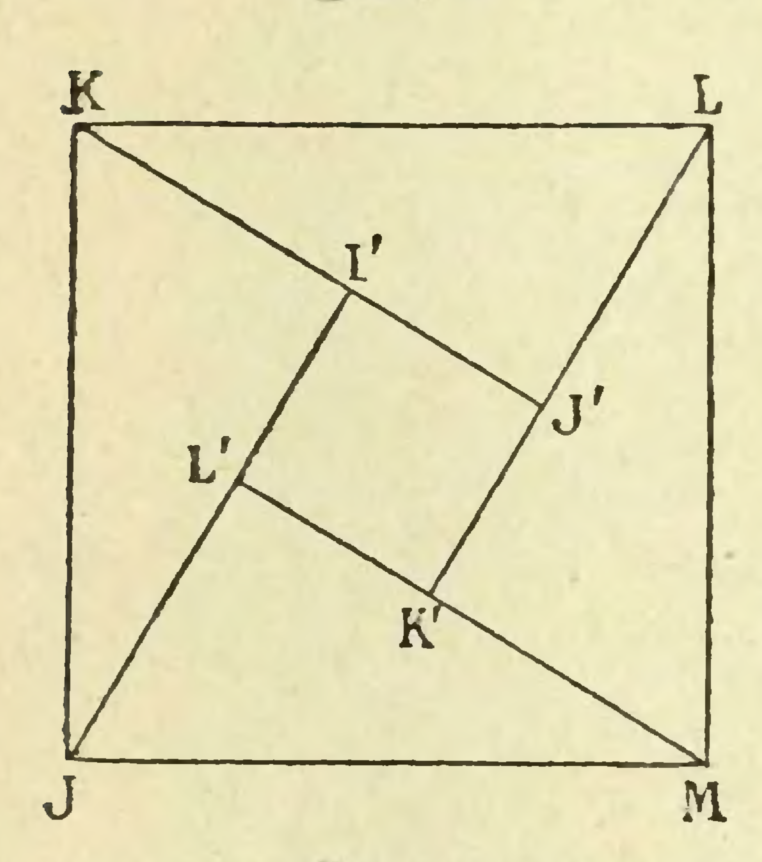
Составить квадратъ изъ двухъ квадратовъ съ произвольными сторонами c и d $(c > d)$. — Наложимъ квадратъ AEFG съ стороной d на квадратъ ABCD съ стороной c такъ, чтобы оба квадрата имѣли общій уголъ и общую сторону, и продолжимъ прямыя EF, GF до ихъ пересѣченія съ сторонами CD и BC въ точкахъ I и H.

Квадратъ ABCD дѣлится прямыми GH и FI на слѣдующія части: 1^0 квадратъ FHCI со стороной $c-d$; 2^0 прямоугольникъ ABHG площади cd, который діагональю AH можно раздѣлить на два равныхъ прямоугольныхъ треугольника; 3^0 прямоугольникъ GFID. Этотъ послѣдній составляетъ вмѣстѣ съ квадратомъ AEFG прямоугольникъ AEID площади cd, который діагональю AI можно раздѣлить на два прямоугольныхъ треугольника, равныхъ другъ другу и треугольникамъ съ гипотенузой AH.



Фиг. 16

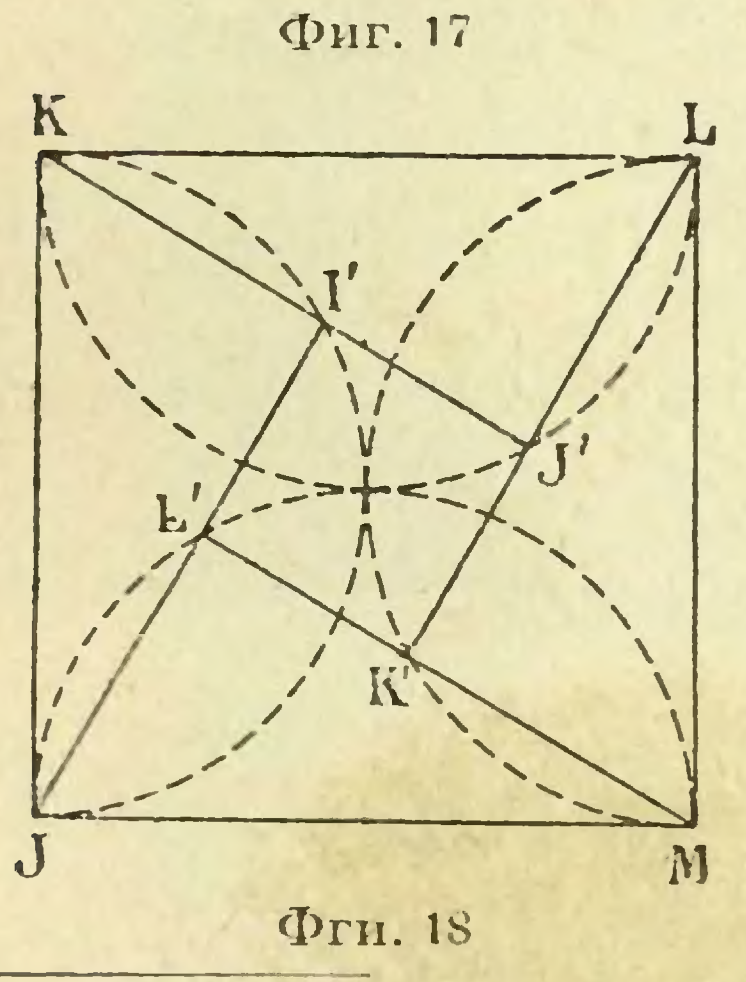
Приведя квадратъ FHCI въ положеніе I′J′K′L′ и обкладывая его полученными четырьмя прямоугольными треугольниками*), какъ указано, получимъ квадратъ JKLM.



Фиг. 17

Раздѣлить квадратъ на два другихъ квадрата, при чемъ сторона c одного изъ этихъ послѣднихъ дана.— На четырехъ сторонахъ даннаго квадрата JKLM, какъ на діаметрахъ, опишемъ полуокружности, на которыхъ, считая отъ вершинъ J, K, L, M, отложимъ хорды JI′, KJ′, LK′, ML′, равныя c.

Легко показать, что эти хорды отчерчиваютъ квадратъ I′J′K′L′ и четыре равныхъ прямоугольныхъ треугольника JI′K,..., при помощи которыхъ можно составить два искомыхъ квадрата, выполняя въ обратномъ порядкѣ построеніе предыдущей задачи.



Фгн. 18

*) Треугольники ABH и AGH суть части квадрата ABCD; треугольникъ AEI составленъ изъ части квадрата AEFG и части квадрата ABCD. То же относится къ треугольнику ADI.

Составить квадратъ изъ n равныхъ квадратовъ, причемъ цѣлое число n можетъ быть совершенно произвольнымъ.—Извѣстно изъ знаменитой теоремы французскаго математика Ферма (Fermat) (1601-1665), что всякое цѣлое число есть либо квадратъ, либо сумма 2-хъ, 3-хъ, либо, наконецъ, 4-хъ квадратовъ. Два первыхъ предположенія мы оставимъ, такъ какъ они были разсмотрѣны раньше (1-ый случай).

Если n равно $a^2+b^2+c^2+d^2$, то нужно соединить a^2+b^2 элементарныхъ квадратовъ въ одинъ квадратъ k^2 (1-й случай), затѣмъ c^2+d^2 квадратовъ въ другой квадратъ l^2 (1-ый случай) и, наконецъ, нужно соединить k^2 и l^2 при помощи перваго вспомогательнаго построенія (2-й случай).

Если n есть число вида $a^2+b^2+c^2$, то l^2сведется къ c^2 элементарнымъ квадратамъ.

Раздѣлить квадратъ на n равныхъ квадратовъ при любомъ цѣломъ n.—Пусть будетъ $n=a^2+b^2+c^2+d^2$ и пусть e будетъ стороной даннаго квадрата; этотъ послѣдній долженъ быть раздѣленъ на n квадратовъ со сторонами, равными $\frac{e}{\sqrt{n}}$ *). Можно сгруппировать a^2+b^2 этихъ квадратовъ такъ, чтобы построить квадратъ k^2 $\left[k^2=(a^2+b^2)\frac{e^2}{n}\right]$, а оставшіеся c^2+d^2 квадратовъ такъ, чтобы получить квадратъ $l^2\left[l^2=(c^2+d^2)\frac{e^2}{n}\right]$.

Съ другой стороны, длина $k=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{n}}\cdot e$ можетъ быть извѣстнымъ образомъ геометрически построена. Найдя k, нужно разложить данный квадратъ e^2 на два другихъ k^2 и l^2, изъ которыхъ k^2 данъ (2-ое вспомогательное предложеніе), и тогда останется только раздѣлить квадраты k^2 и l^2 соотвѣтственно

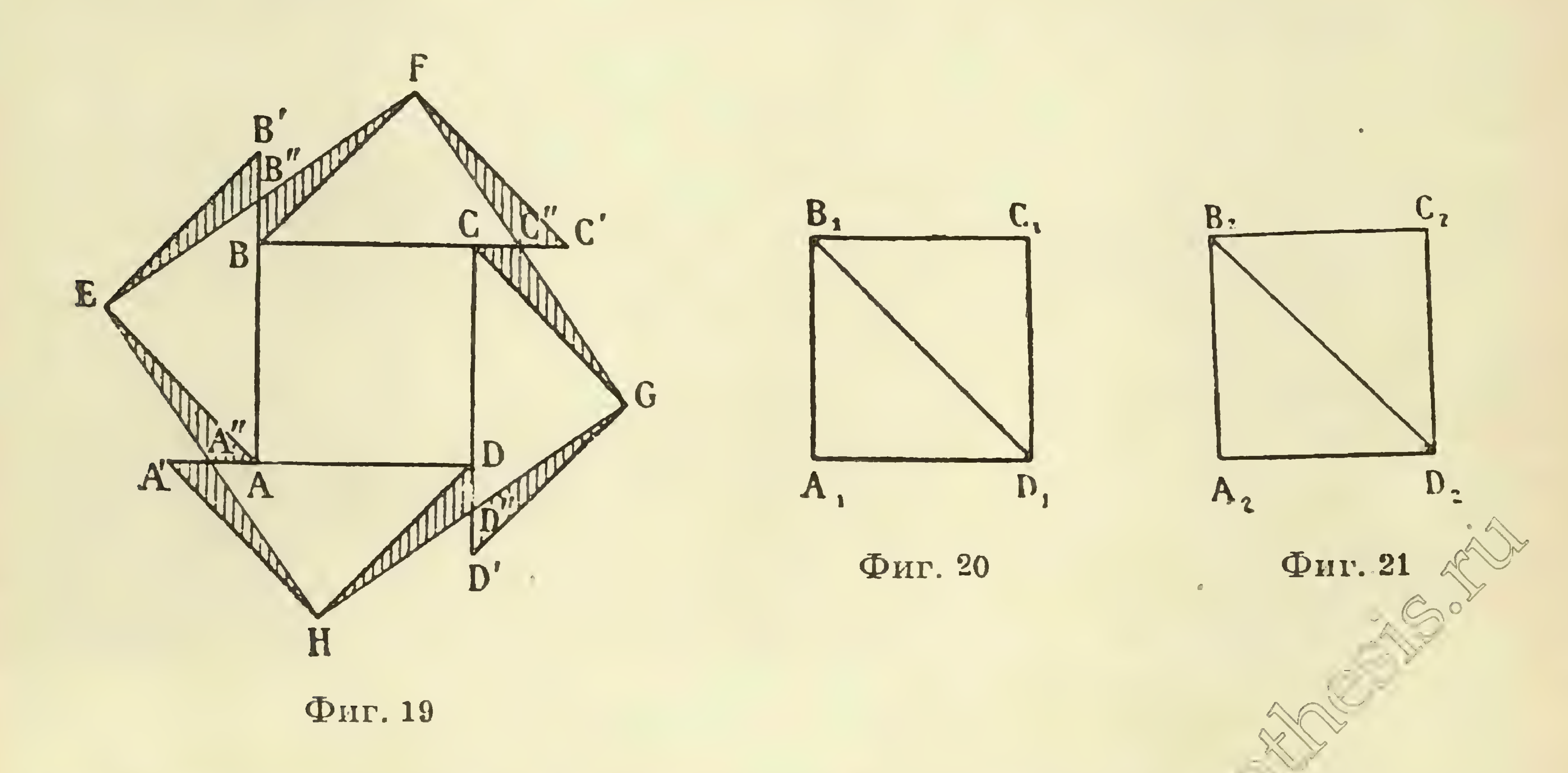
*) Отрѣзокъ $\frac{e}{\sqrt{n}}$ можно построить, какъ среднее геометрическое отрѣзковъ e и $\frac{e}{n}$.

на a^2+b^2 и c^2+d^2 равныхъ квадратовъ; эта задача уже была рѣшена (1-ый случай).

Частные случаи. — Только-что изложенный общій методъ можетъ оказаться довольно сложнымъ въ примѣненіи, особенно при любомъ n; въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ можно найти болѣе простыя прямыя рѣшенія.

Составить квадратъ изъ 3-хъ равныхъ квадратовъ. Такъ какъ $3=1^2+1^2+1^2$, то можно воспользоваться построеніемъ 2-го случая, примѣняя общій методъ. Но для этой задачи можно привести изящное рѣшеніе, данное Абу̂'ль Уафâ въ собраніи геометровъ и практиковъ. Въ задачѣ, предложенной въ этомъ собраніи, требовалось *разрѣзать матеріально три квадратныхъ кирпича такъ, чтобы можно было составить квадратъ изъ полученныхъ частей.*

Пусть будутъ ABCD, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ три равные квадрата; раздѣлимъ каждый изъ двухъ послѣднихъ діагональю



Фиг. 19

Фиг. 20

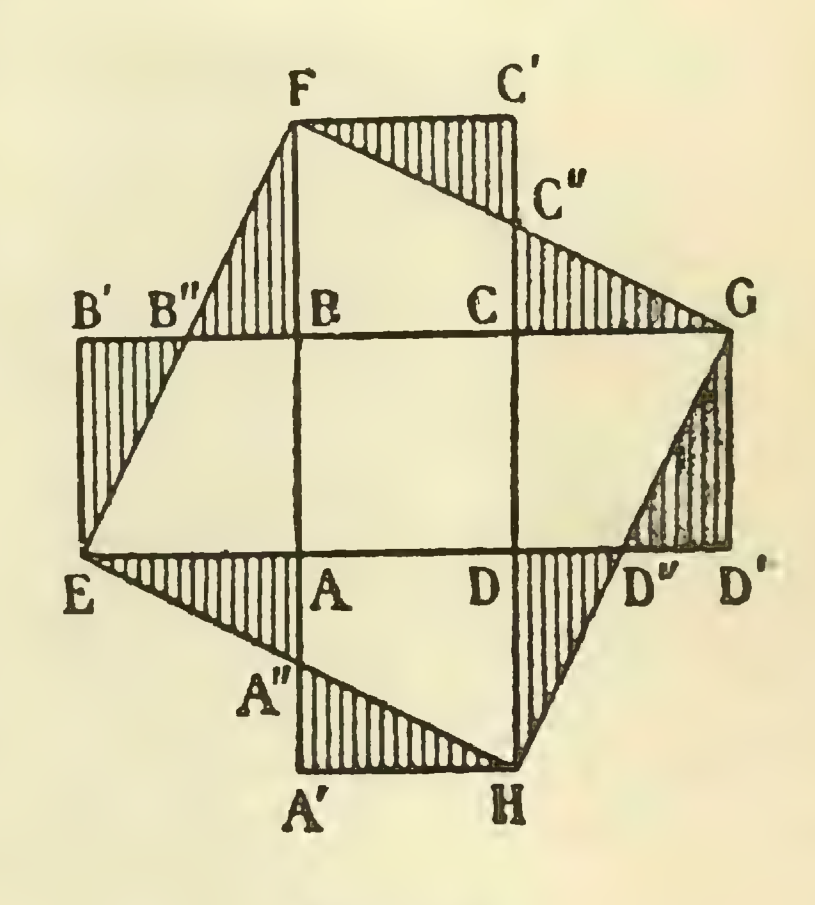
Фиг. 21

на двѣ равныя части и расположимъ полученные треугольники вдоль контура перваго квадрата, какъ указано на фиг. 19 для треугольниковъ AEB', BFC',.... Соединяя теперь точки E, F, G, H прямыми, получимъ четыреугольникъ EFGH, который, какъ это легко показать, есть квадратъ. Треугольники A"A'H и A"AE,

B″B′E и B″BF,... равны между собой, такъ что, отрѣзавъ треугольники A″A′H, B″B′E,... и приведя ихъ въ положенія A″AE, B″BF,..., получимъ матеріальный квадратъ изъ 3-хъ данныхъ квадратовъ.

Составить квадратъ изъ 5 равныхъ квадратовъ. Приводимое ниже рѣшеніе, аналогичное предыдущему, проще, чѣмъ основанное на общемъ методѣ (1-ый случай: $5 = 1^2 + 2^2$).

Расположимъ вокругъ одного изъ квадратовъ ABCD четыре другіе AEB′B, BFC′C,..., какъ указано на фиг. 22, и соединимъ точки E съ F, F съ G,...: четыреугольникъ EFGH есть квадратъ. Такъ какъ треугольники A″A′H и A″AE, B″B′E и B″BF,... равны между собой, то, отрѣзая треугольники A″A′H, B″B′E,... и приводя ихъ въ положенія A″AE, B″BF,..., получимъ квадратъ EFGH, составленный изъ 5-ти данныхъ квадратовъ.



Фиг. 22

II. — Рѣшеніе Монтукла (Montucla) (1778). *Составить квадратъ изъ n равныхъ квадратовъ, при чемъ c есть общая величина сторонъ n данныхъ квадратовъ.*

Изъ n данныхъ квадратовъ всегда можно составить прямоугольникъ, напримѣръ, расположивъ ихъ въ одинъ рядъ; основаніемъ полученнаго прямоугольника будетъ отрѣзокъ длины nc, а высотою отрѣзокъ c. Задача приводится, такимъ образомъ, къ слѣдующей:

Превратить прямоугольникъ въ равновеликій квадратъ посредствомъ перемѣщенія элементовъ.

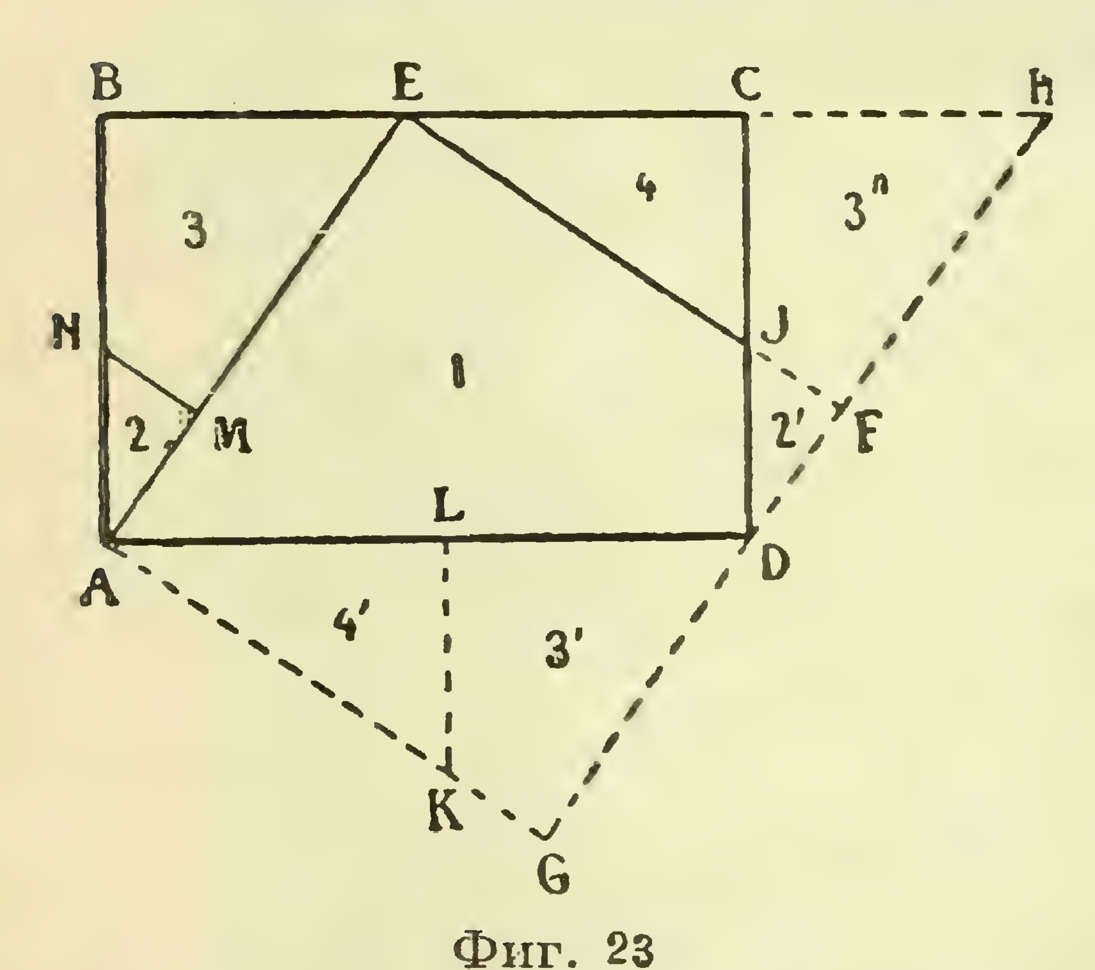
Пусть ABCD будетъ данный прямоугольникъ со сторонами $AB = a$, $BC = b$ $(a < b)$; изъ точки A растворомъ циркуля, равнымъ средней пропорціональной отрѣзковъ AB и BC, опишемъ окружность, которая пересѣчетъ сторону BC въ точкѣ E. Возставимъ къ прямой AE въ точкѣ E перпендику-

ляръ, который пересѣчетъ сторону AD въ нѣкоторой точкѣ I. Можно сдѣлать слѣдующія два предположенія: 1⁰ точка I расположена внѣ отрѣзка AD, 2⁰ точка I находится между точками A и D. Частный случай, когда точка I совпадаетъ съ точкой D легко выводится изъ двухъ другихъ общихъ случаевъ.

1-й случай. *Точка* I *лежитъ внѣ стороны* AD.—Это условіе можно выразить неравенствомъ $b < 2a$. Дѣйствительно,

AI > AD или $\frac{ab}{\sqrt{ab - a^2}}$ b*); упрощая, получимъ $b < 2a$.

Проведемъ черезъ точку D прямую GH, параллельную прямой AE, и положимъ, что прямая GH встрѣтитъ соотвѣтственно въ точкахъ H, G и F сторону BC и перпендикуляры, возставленные въ точкахъ A и E къ прямой AE.



Фиг. 23

Прямоугольники ABCD и AEFG равновелики, ибо каждый изъ нихъ равновеликъ параллелограмму AEHD. А такъ какъ площадь ABCD = AB × BC = $\overline{AE}^2$ и вмѣстѣ съ тѣмъ основаніе прямоугольника AEFG есть AE, то и высота его тоже равна AE, и, слѣдовательно, прямоугольникъ AEFG есть квадратъ.

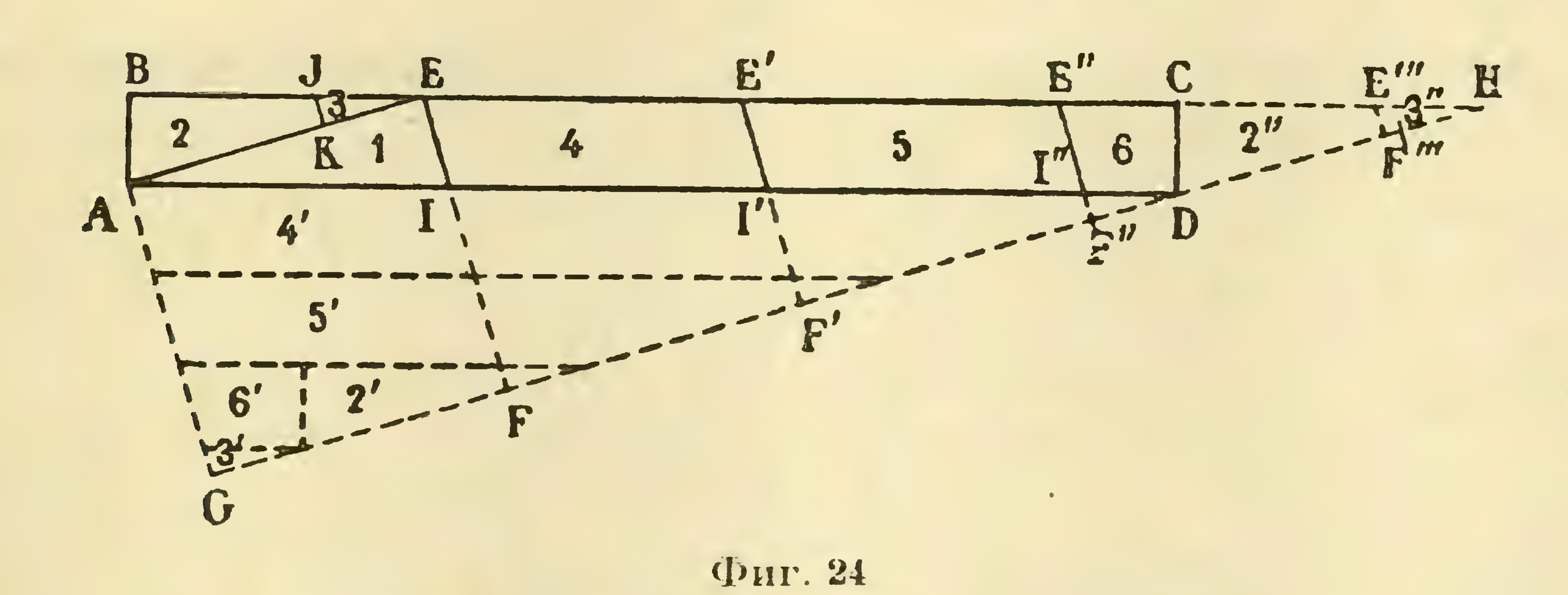
Отложимъ теперь на прямой AE отъ точки A отрѣзокъ AM = DF, и на прямой AD—отрѣзокъ AL = EC; возставимъ въ точкахъ M и L перпендикуляры къ прямымъ AE и AD и для простоты обозначимъ цифрами полученныя части площадей, какъ указано на фиг. 23.

Такъ какъ △ ABE = △ CDH, то $2 = 2'$ и $3 = 3''$; △ EFH = = △ AGD, $4 = 4'$, $3'' = 3'$ и, слѣдовательно, $3 = 3'$. Части 1, 2, 3, 4 даннаго прямоугольника ABCD въ новомъ расположеніи 1, 2′, 3′, 4′ дадутъ квадратъ AEFG.

---

*) Равенство $AI = ab : \sqrt{ab - a^2}$ вытекаетъ изъ подобія треугольниковъ AEI и BEA. Квадратъ ихъ общей стороны AE по условію равенъ ab.

2-ой случай. *Точка* I *лежитъ между точками* A и D. — Въ этомъ случаѣ $b > 2a$. Проведемъ черезъ точку D прямую GH параллельно AE и положимъ, что GH встрѣтитъ соотвѣтственно въ точкахъ H, G и F прямую BC и перпендикуляры,



Фиг. 24

возставленные въ точкахъ A и E къ прямой AE. Можно показать, какъ и въ первомъ случаѣ, что четыреугольникъ AEFG есть квадратъ.

Будемъ откладывать на прямой BC отрѣзки EE′, E′E″, E″E‴,..., равныя AI, до тѣхъ поръ, пока перейдемъ за точку C, и черезъ точки E′, E″, E‴,... проведемъ прямыя, параллельныя EF; отложимъ затѣмъ на прямой EA отрѣзокъ EK = HF‴ и въ точкѣ K возставимъ перпендикуляръ KJ къ прямой AE. Прямоугольникъ ABCD раздѣленъ теперь на части 1, 2, 3, 4, 5, 6,..., которыя въ другомъ расположеніи 1, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′,... образуютъ квадратъ AEFG.

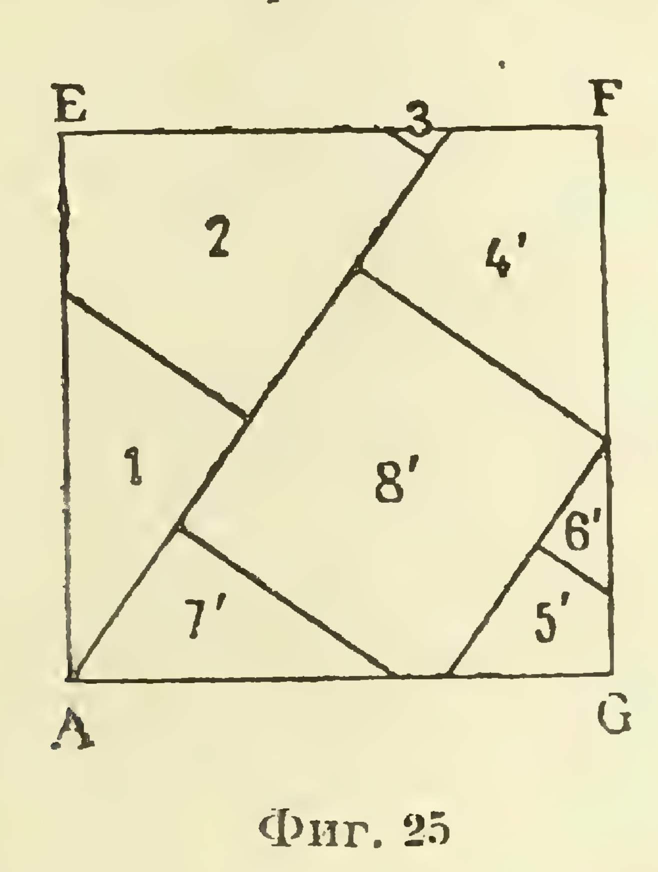
Дѣйствительно, можно перейти отъ прямоугольника ABCD къ параллелограмму AEHD, перенося треугольникъ ABE на мѣсто равнаго ему треугольника DCH. Затѣмъ можно перейти отъ параллелограмма AEHD къ равновеликому квадрату AEFG слѣдующимъ образомъ. Замѣтимъ прежде всего, что въ разсматриваемомъ случаѣ I″D = AD — 3 AI = E‴H; слѣдовательно, прямоугольные треугольники E‴F‴H и I″F″D равны, и E‴F‴ = I″F″; точно такъ же E″F″ = I′F′, E′F′ = IF. Поэтому мы можемъ послѣдовательно перемѣстить треугольникъ E‴F‴H на мѣсто треугольника I″F″D, затѣмъ трапецію F″E″E‴F‴

(составленную изъ пятиугольника I''E''E'''F'''D и изъ треугольника I''F''D) на мѣсто равной ей трапеціи F'I'I''F'', затѣмъ трапецію F'E'E''F'' (составленную изъ параллелограмма I'E'E''I'' и изъ трапеціи F'I'I''F'') на мѣсто равной ей трапеціи FII'F' и, наконецъ, трапецію FEE'F' (составленную изъ параллелограмма IEE'I' и изъ трапеціи FII'F') на мѣсто равной ей трапеціи AIFG.

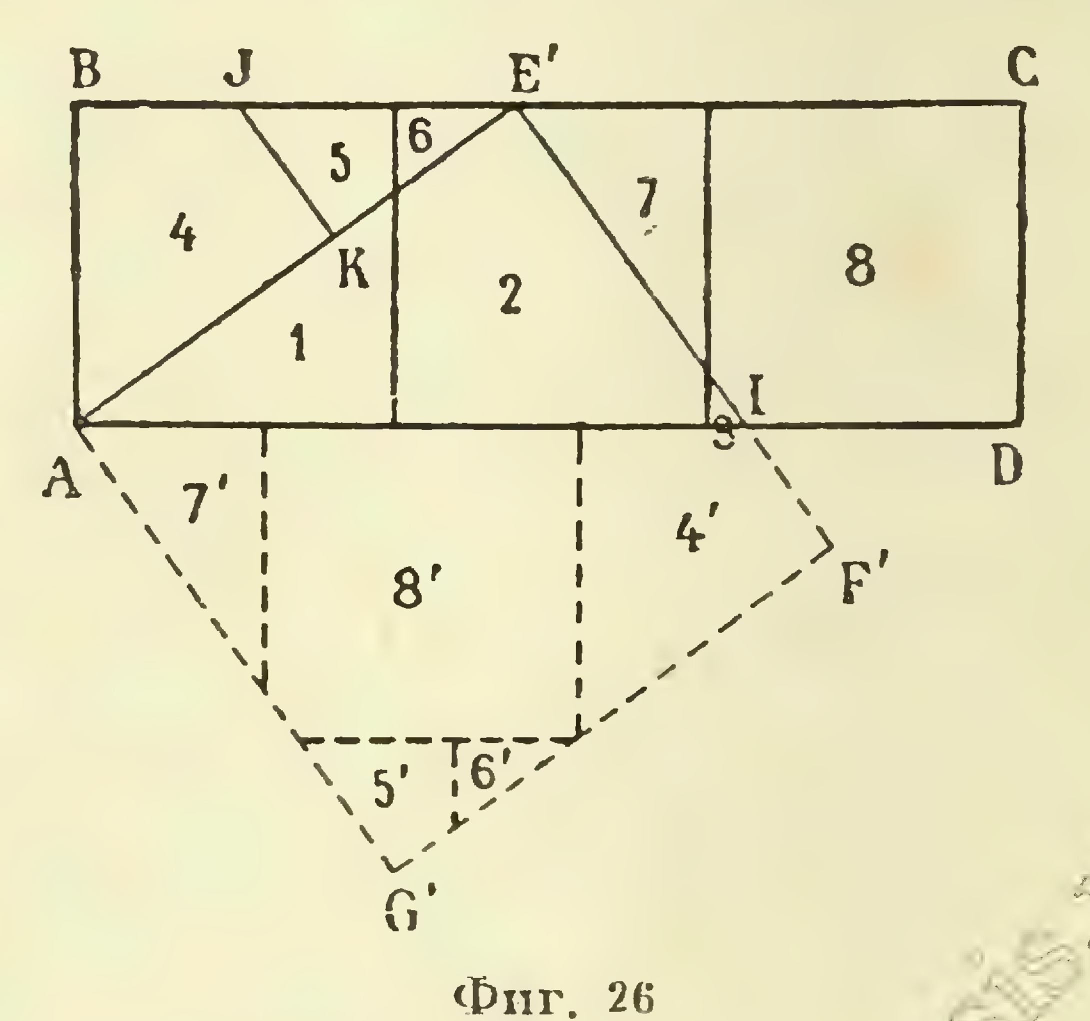
Такимъ путемъ мы механически, такъ сказать, получимъ положенія, которыя должны занять части даннаго прямоугольника для того, чтобы составить квадратъ AEFG.

Замѣчаніе. — Рѣшеніе Монтукла, которое мы, впрочемъ, дополнили и значительно измѣнили въ томъ, что касается 2-го случая, есть въ сущности лишь частный случай общаго метода Гителя (Guitel) для разложенія равновеликихъ многоугольниковъ на конгруэнтные элементы; этотъ методъ мы изложимъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

Разложить квадратъ, имѣющій сторону C, на n равныхъ квадратовъ. — Сторона c одного изъ n элементарныхъ



Фиг. 25



Фиг. 26

квадратовъ опредѣляется выраженіемъ $\frac{C}{\sqrt{n}}$. Можно, слѣдовательно, построить прямоугольникъ, содержащій n квадратовъ и равновеликій данному квадрату; мы приходимъ, такимъ образомъ, къ предыдущему построенію.

Если, напримѣръ, данъ квадратъ AEFG и нужно разложить его на 3 равныхъ квадрата, то опредѣляютъ численно или графически величину выраженія $\frac{AE}{\sqrt{3}}$, которою опредѣляется высота прямоугольника ABCD, составленнаго изъ 3-хъ равныхъ квадратовъ и равновеликаго квадрату AEFG.

Поступая такъ, какъ было указано во 2-омъ случаѣ, мы приходимъ къ разсѣченію прямоугольника ABCD на части прямыми AE′, E′I и JK; такимъ образомъ получаются 8 элементовъ, которые при другомъ расположеніи образуютъ квадратъ AE′F′G′. Мы намѣтили на квадратѣ AEFG положенія этихъ элементовъ; изъ нихъ, въ свою очередь, можно обратно сложить прямоугольникъ ABCD, составленный изъ 3-хъ квадратовъ.

III. Рѣшеніе Перигаля (Périgal) (1875). — Перигаль разсматривалъ на самомъ дѣлѣ только слѣдующій вопросъ: *Превратить квадратъ въ равновеликій прямоугольникъ, одна сторона котораго дана.* Но очень простой способъ рѣшенія этого вопроса легко примѣнить къ слѣдующей задачѣ, къ которой, какъ мы увидимъ, можно свести вопросъ о составленіи и разложеніи квадратовъ.

Превратить прямоугольникъ въ равновеликій квадратъ при помощи перемѣщенія элементовъ. — Пусть ABCD будетъ прямоугольникъ съ сторонами $AB = a$, $BC = b$ $(a < b)$ и EAFG — равновеликій квадратъ съ стороной $c = \sqrt{ab}$, который мы прикладываемъ къ прямоугольнику ABCD такъ, чтобы вершина A была общей и чтобы стороны AD и AF лежали на одной прямой. Проведемъ прямую DE и будемъ различать два случая, зависящихъ отъ того, встрѣтитъ ли прямая, параллельная DE и проведенная черезъ точку C, прямую AD въ точкѣ L, лежащей на отрѣзкѣ AF или на отрѣзкѣ FD.

1-ый случай. *Точка* L *лежитъ на прямой* AF. — Черезъ точки A, C, F проведемъ прямыя AI, CL и FP, параллельныя DE. Раздѣлимъ теперь параллелограммъ AICL на двѣ трапеціи какою-либо прямой JK, параллельной AB; отложимъ затѣмъ

на прямой FP отрѣзокъ $FN = AJ$ и черезъ точку N проведемъ прямую NO, параллельную EG. Разсматриваемые прямоугольникъ и квадратъ раздѣлится каждый на 4 элемента, которые могутъ быть соотвѣтственно наложены другъ на друга.

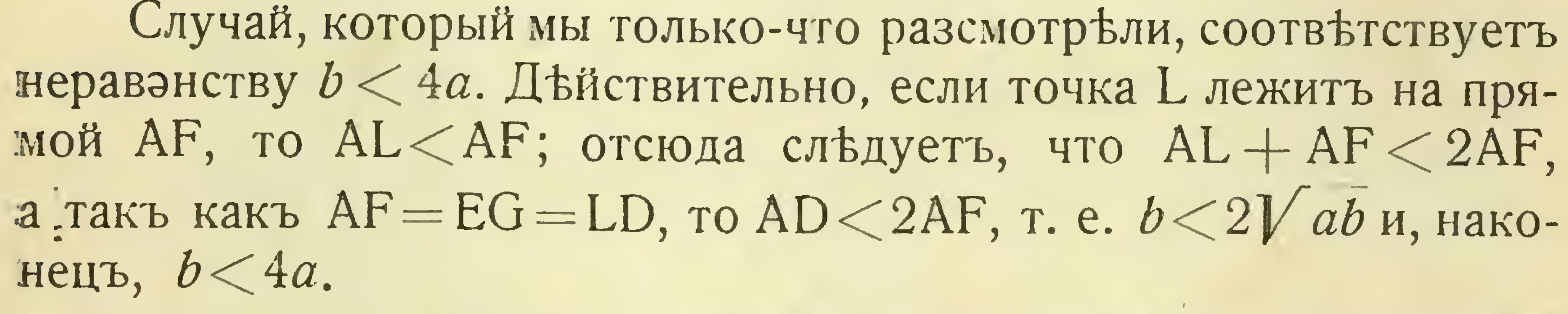
Фиг. 27

Дѣйствительно, изъ подобія треугольниковъ EAD и PAF слѣдуетъ:

$$\frac{c}{AP} = \frac{b}{c}; \text{ откуда } AP = \frac{c^2}{b} = a = AB.$$

Точно такъ же можно показать, что $MG = a = CD$; слѣдовательно, прямоугольные треугольники 1 и 1′, 4 и 4′ равны. Легко видѣть, что трапеціи 2 и 2′, 3 и 3′ соотвѣтственно равны.

Построеніе допускаетъ безчисленное множество рѣшеній, такъ какъ положеніе прямой JK выбирается произвольно.



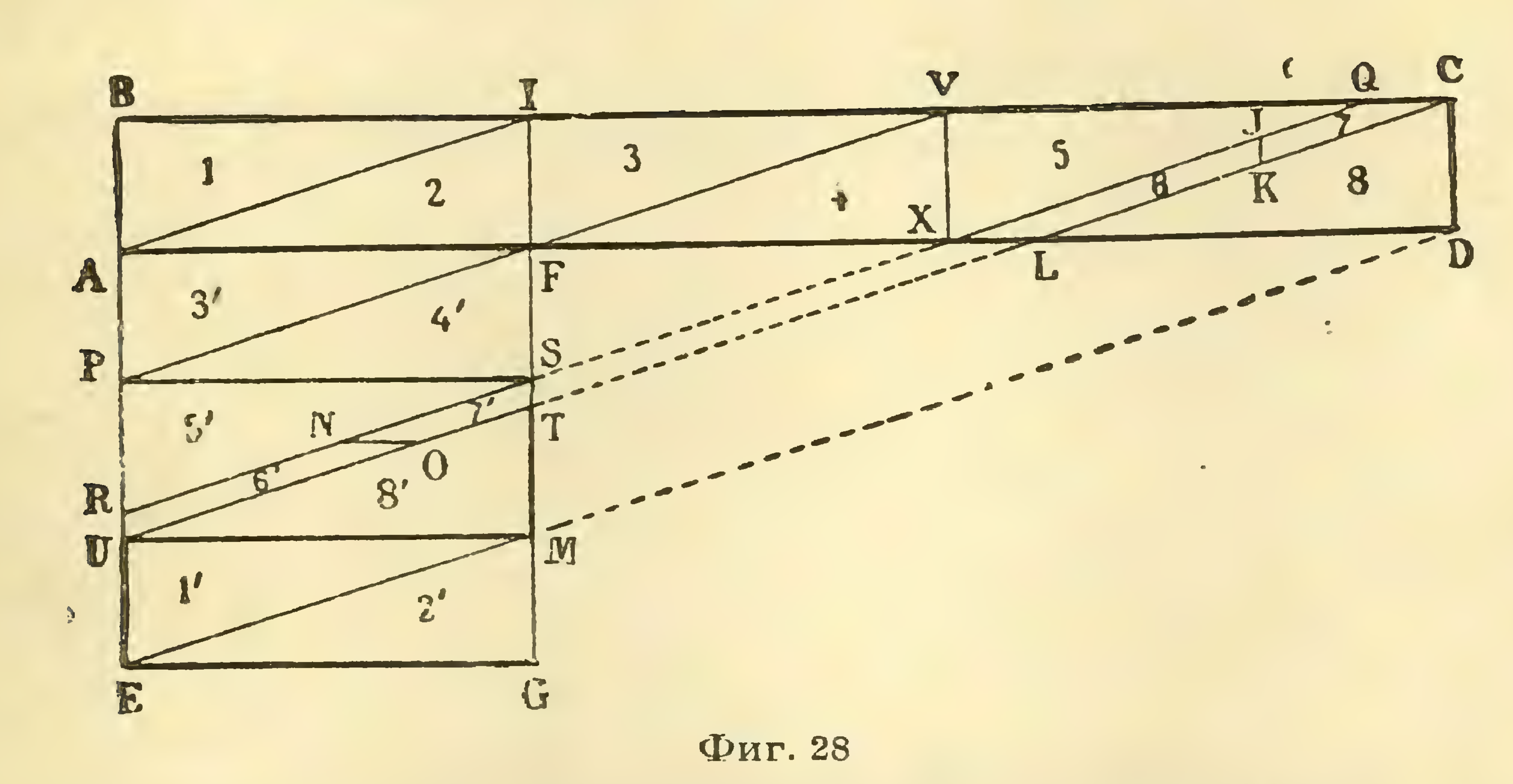
Случай, который мы только-что разсмотрѣли, соотвѣтствуетъ неравэнству $b < 4a$. Дѣйствительно, если точка L лежитъ на прямой AF, то $AL < AF$; отсюда слѣдуетъ, что $AL + AF < 2AF$, а такъ какъ $AF = EG = LD$, то $AD < 2AF$, т. е. $b < 2\sqrt{ab}$ и, наконецъ, $b < 4a$.

2-й случай. *Точка* L *лежитъ на прямой* FD.—Въ этомъ случаѣ $b > 4a$. Здѣсь уже нельзя провести прямую JK между двумя параллелями AI и LC, и предыдущее построеніе не имѣетъ мѣста.

Перигаль не разсматривалъ этого случая, такъ что его доказательство неполно, но можно это доказательство дополнить слѣдующимъ образомъ.

На прямой FD отложимъ сторону квадрата AF столько разъ, сколько возможно, не переходя за точку L. Черезъ точки A, F, X,..., L проведемъ прямыя, параллельныя DE, и продолжимъ ихъ такъ, чтобы онѣ пересѣкали прямоугольникъ ABCD

и квадратъ EAFG, потомъ черезъ точки F, X,... проведемъ параллели къ сторонѣ AB.



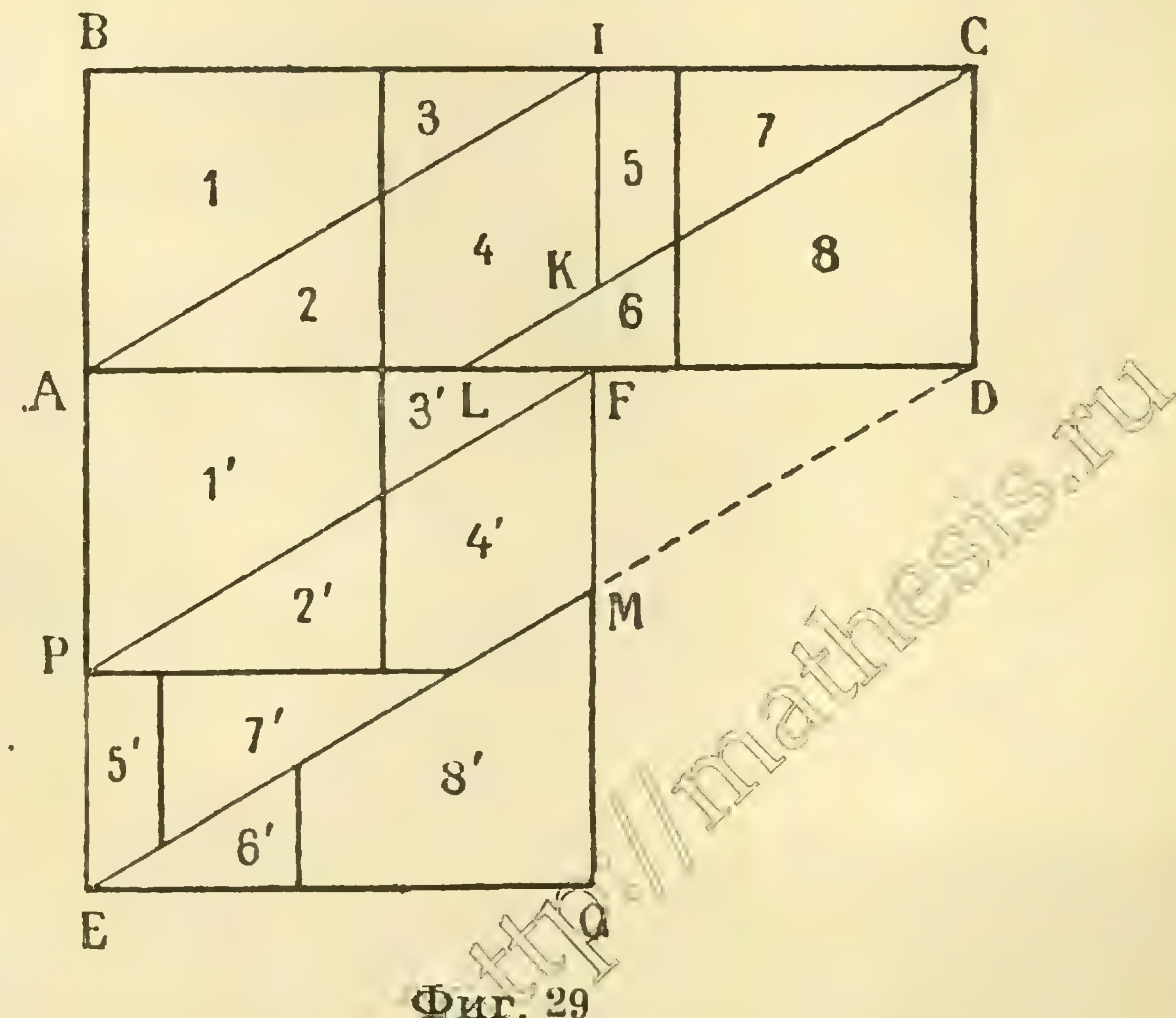
Фиг. 28

Наконецъ, проведемъ параллельно сторонѣ AB произвольную прямую JK, которая раздѣлитъ параллелограммъ XQCL на двѣ трапеціи; отложимъ отрѣзокъ SN = CK, проведемъ прямую NO параллельно EG.

Въ случаѣ, изображенномъ на фиг. 28, мы раздѣлимъ прямоугольникъ ABCD и квадратъ EAFG на 6 равныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ и на 2 трапеціи; каждый изъ треугольниковъ прямоугольника равенъ каждому изъ треугольниковъ квадрата, такъ какъ они имѣютъ равные углы и по равной сторонѣ

AB = IF = ⋯ = AP = PR...

Съ другой стороны, трапеціи, напримѣръ 7 и 7′, равны, такъ какъ онѣ имѣютъ равные углы, одну и ту же высоту и равныя основанія.



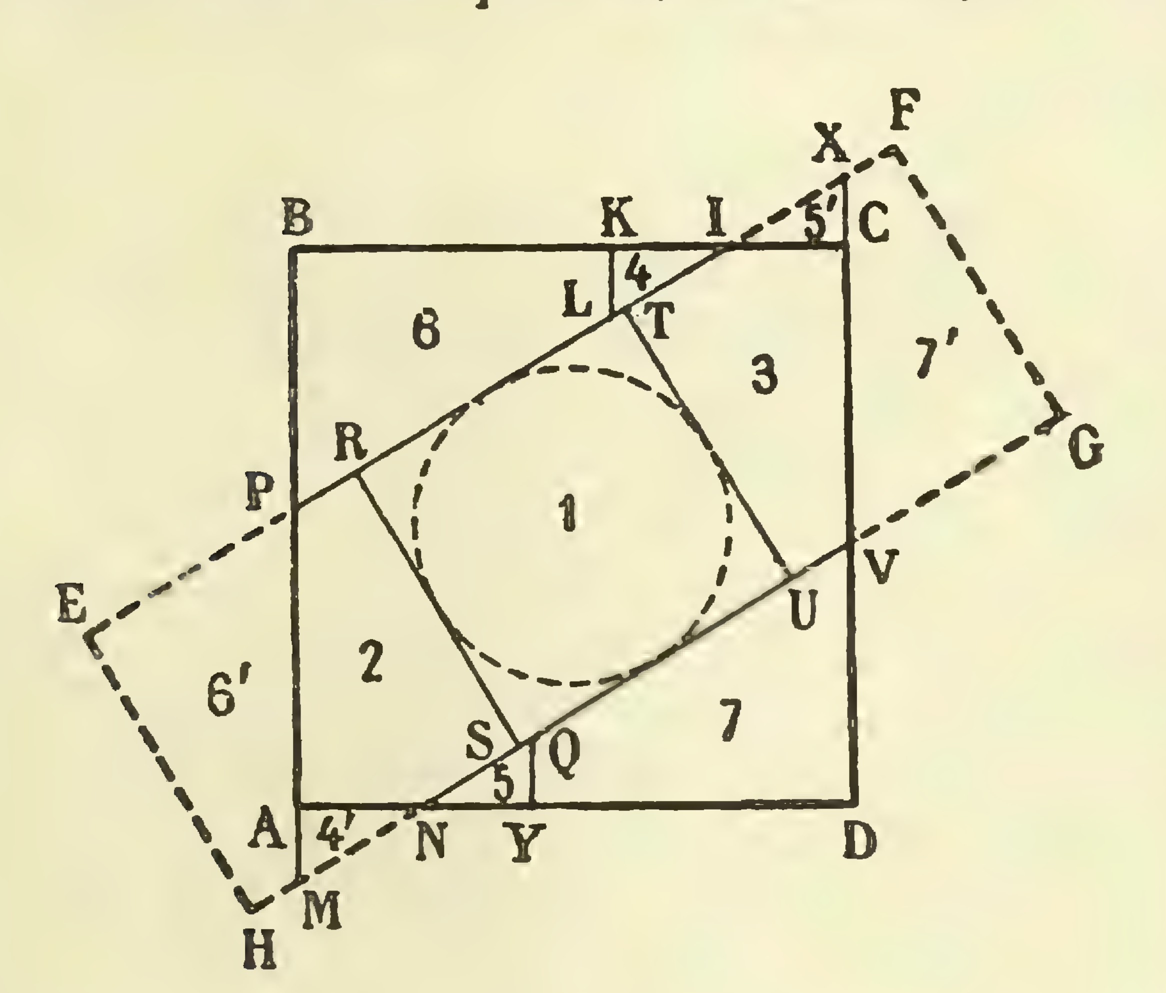
Фиг. 29

Замѣчаніе. Рѣшеніе, только-что изложенное, приводитъ къ болѣе быстрому постро-

енію, чѣмъ построеніе Монтукла. Оно также и проще, такъ какъ здѣсь построеніе, относящееся къ 1-му случаю, примѣняется при $b < 4a$, между тѣмъ какъ при рѣшеніи Монтукла мы имѣемъ дѣло съ первымъ случаемъ только при $b < 2a$.

Примѣненіе. — *Составить квадратъ изъ 3-хъ равныхъ квадратовъ.* — Достаточно примѣнить правило, относящееся къ 1-му случаю. Фиг. 29 достаточно ясна для того, чтобы сдѣлать излишними объясненія. Все-таки мы укажемъ, что дѣлящую прямую въ параллелограммѣ AICL мы провели черезъ точку I для того, что получить меньшее число элементовъ.

IV. Рѣшеніе Коатпона (de Coatpont) (1877). — *Разложить квадратъ, имѣющій сторону* C, *на* n *равныхъ квадратовъ.* — Пусть n будетъ равно 3; на сторонѣ BC даннаго квадрата ABCD отложимъ длину BK, равную сторонѣ c одного изъ 3-хъ квадратовъ. Эта послѣдняя равна $\frac{C}{\sqrt{3}}$ $\left(\frac{C}{\sqrt{n}} \text{ при } n \text{ квадратахъ}\right)$.



Фиг. 30

Построимъ окружность, имѣющую тотъ же центръ что и квадратъ ABCD, и діаметръ, равный c, затѣмъ проведемъ слѣдующія касательныя къ этой окружности: касательную IP, проходящую черезъ середину I отрѣзка KC, касательныя RS и TU, перпендикулярныя къ прямой IP, и касательную NV, параллельную той же прямой IP. Отложимъ, наконецъ, отрѣзокъ NY = IC и возставимъ перпендикуляры KL и YQ къ сторонамъ BC и AD; данный квадратъ окажется разложеннымъ на части, которыя при другомъ распредѣленіи дадутъ прямоугольникъ EFGH, составленный изъ 3-хъ равныхъ, приложенныхъ другъ къ другу квадратовъ, при чемъ центральнымъ квадратомъ будетъ первый построенный квадратъ RTUS.

Дѣйствительно, очевидно, что треугольники 4 и 4′, 5 и 5′, трапеціи 6 и 6′, 7 и 7′ соотвѣтственно равны; элементы 1, 2, 3 — общи обѣимъ фигурамъ.

Если бы *n* было больше 3-хъ, то можно было бы точно такъ же найти положеніе прямоугольника EFGH и безъ труда произвести разложеніе квадрата.

Можно получить безчисленное множество рѣшеній, отличныхъ отъ приведеннаго, перемѣщая прямоугольникъ EFGH параллельно самому себѣ такъ, чтобы вершина E оставалась на прямой BE; треугольники и трапеціи, которые не являются общими для квадрата и прямоугольника, останутся соотвѣтственно равными.

Составить квадратъ изъ n равныхъ квадратовъ, имѣющихъ каждый сторону c. — Опредѣляютъ сторону C искомаго квадрата при помощи соотношенія $C=c\sqrt{n}$ и поступаютъ дальше, какъ и въ предыдущей задачѣ.

БИБЛІОГРАФІЯ

F. Woepcke. — *Analyse et extraits d'un recueil de constructions géométriques d'Aboûl Wafâ.* J[al] Asiat., 2[e] sem. 1855.

Ozanam, revu par M. de C. G. F. (Montucla). — *Récréations mathématiques et physiques,* tome I. Paris 1778, in-8[0].

Henry Perigal. — *Geometrical dissections and transformations.* Messenger of Mathem., 1875.

Paul Busschop. — *Problème de Géométrie.* N[le] Corresp. Math., 1876.

De Coatpont. — *Sur un problème de M. Busschop.* N[lle] Corresp. Math., 1877.

§ 3. — Разложеніе равновеликихъ многоугольниковъ на конгруэнтные элементы.

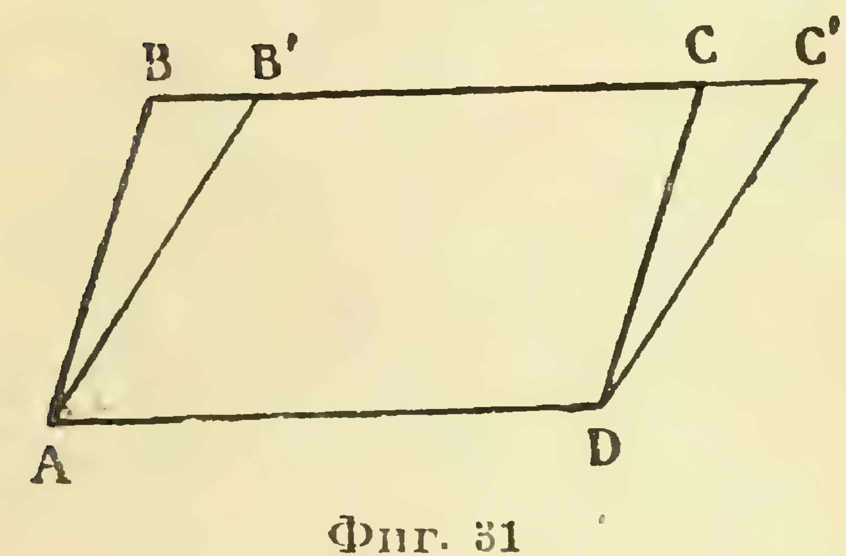
Вопросъ состоитъ въ слѣдующемъ: *Данъ многоугольникъ* A, *нужно разложить его на элементы такъ, чтобы, сложивши ихъ другимъ способомъ, можно было получить данный многоугольникъ* B, *равновеликій первому.*

Возможность этой операціи, повидимому, была впервые доказана венгерскимъ ученымъ Больэ (Bolyai) (1802-1860); дѣй-

ствительное разложеніе (для многоугольниковъ плоскихъ и сферическихъ) было дано впервые нѣмецкимъ офицеромъ Гервиномъ (Gerwien) въ 1833 году, а затѣмъ различными авторами. Ограничиваясь тѣми изъ нихъ, съ работами которыхъ мы могли ознакомиться, мы укажемъ на Севена (Sévène) (1867), Гителя, де ла Кампа (S. de la Campa), де Цеута (de Ceuta), Жерара (Gérard) (1895), Эллингъ Голста (Elling Holst) изъ Христіаніи (1896).

Мы будемъ излагать почти текстуально (если только противное не оговорено) методъ Гителя, который намъ кажется наиболѣе удобнымъ въ примѣненіяхъ.

I. Многоугольники A и B суть параллелограммы, имѣющіе общее основаніе и одну и ту же высоту. Пусть будутъ даны параллелограммы ABCD и AB′C′D; можно различать два случая, смотря по тому, имѣетъ ли сторона B′C′ общую часть съ стороной BC или нѣтъ.



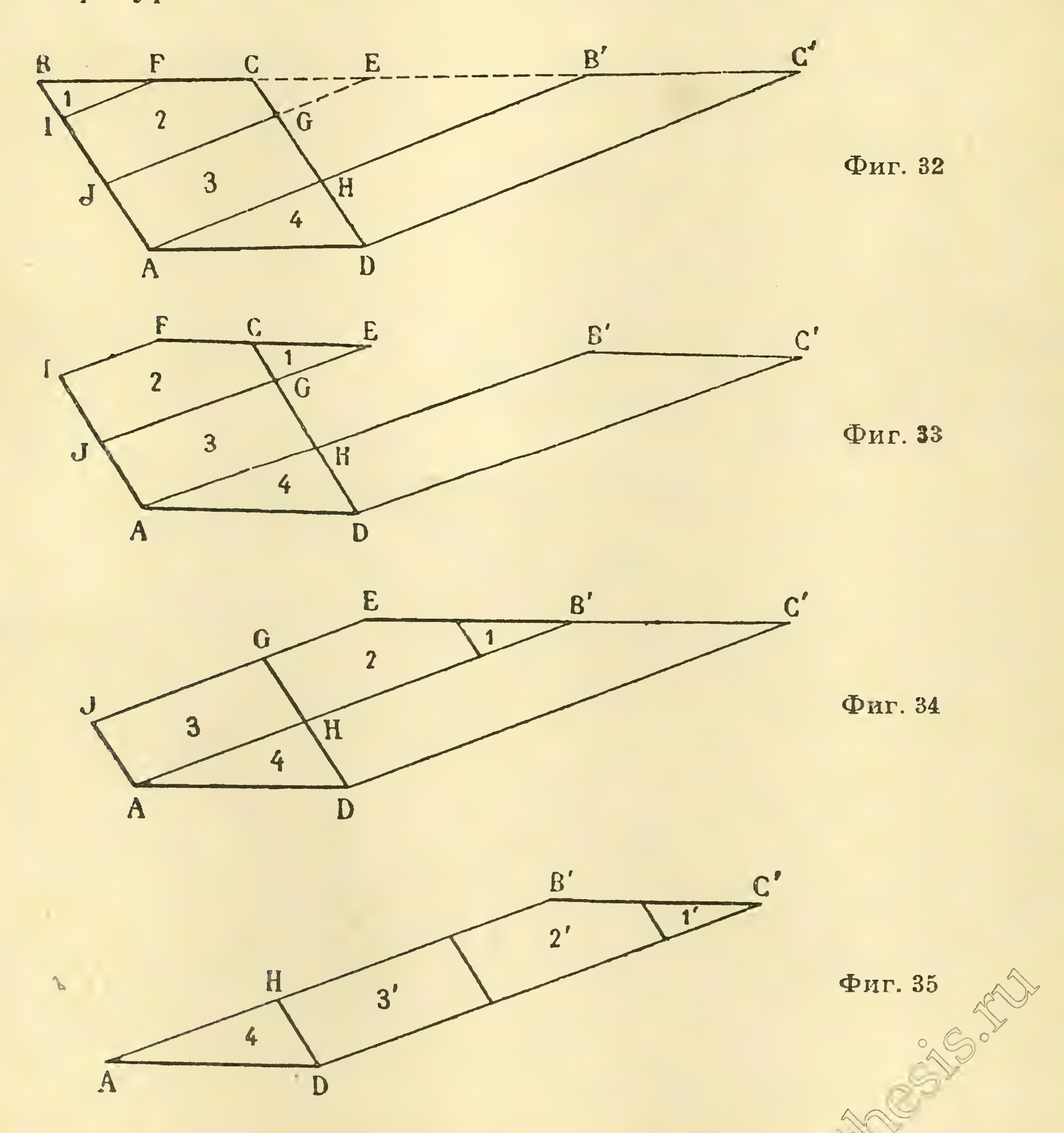
Фиг. 31

1-й случай. — Отъ первой фигуры переходимъ ко второй, перенося треугольникъ ABB′ и накладывая его на равный ему треугольникъ DCC′.

2-й случай. — Наносимъ послѣдовательно на сторону, противоположную общему основанію AD, начиная отъ точки B′, отрѣзки, равные B′C′, столько разъ, сколько необходимо для того, чтобы послѣдній захватывалъ сторону BC. Черезъ полученнныя точки E, F,... проведемъ прямыя, параллельныя прямой C′D. Параллелограммъ ABCD разбивается на многоугольники, которые могутъ воспроизвести параллелограммъ AB′C′D.

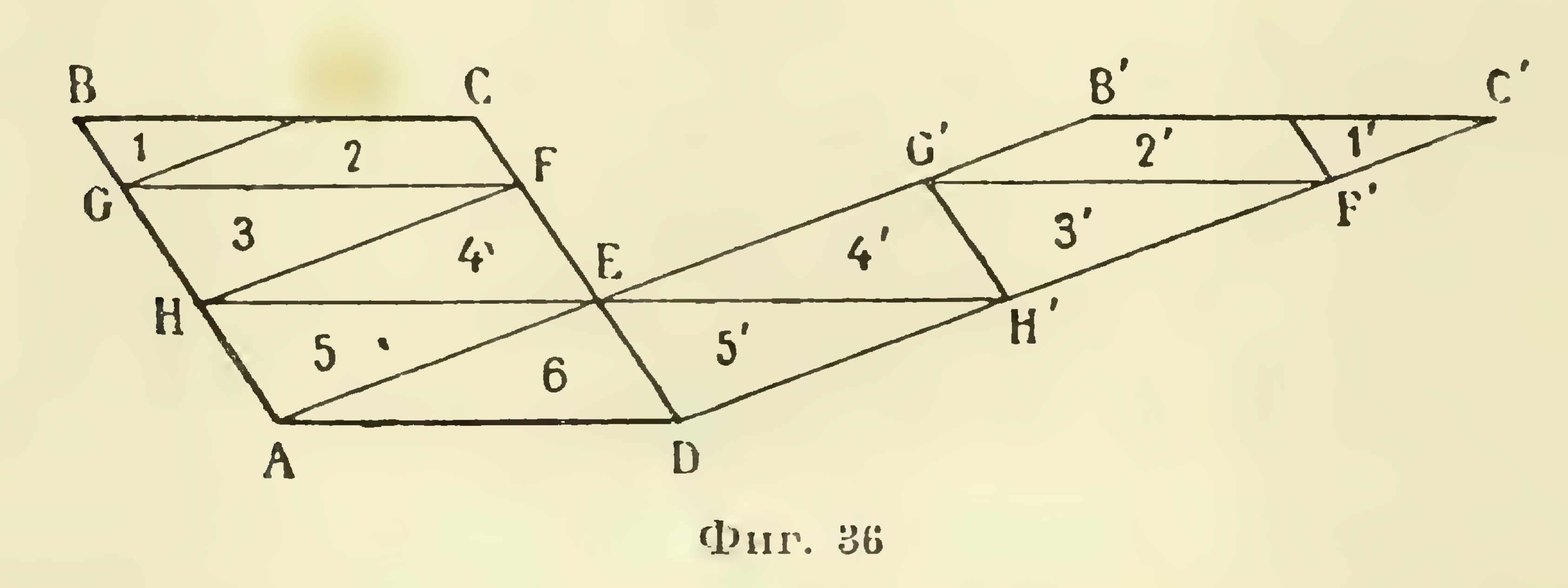
Дѣйствительно, приведемъ элементъ 1 (фиг. 32) въ положеніе CGE (фиг. 33); потомъ трапецію JIFE (фиг. 33), составленную изъ элементовъ 1 и 2, въ положеніе GEB′H (фиг. 34); и, наконецъ, трапецію AJEB′ (фиг. 34), составленную изъ элементовъ 1, 2, 3, въ положеніе DHB′C′ (фиг. 35); мы получимъ параллелограммъ AB′C′D.

Построеніе послѣдовательныхъ фигуръ, которое мы указали исключительно для большей ясности, совершенно безполезно на практикѣ; вполнѣ достаточно выполнить построеніе первой фигуры.



Приведемъ для 2-го случая построеніе Эллинга Голста. Пусть E будетъ точкой пересѣченія прямыхъ CD и AB′; отложимъ отрѣзокъ DE на прямой AB и отрѣзокъ AE на прямой DC′столько разъ, сколько возможно. Черезъ полученныя точки H, G,... на прямой AB и H′, F′,... на прямой DC′ проведемъ

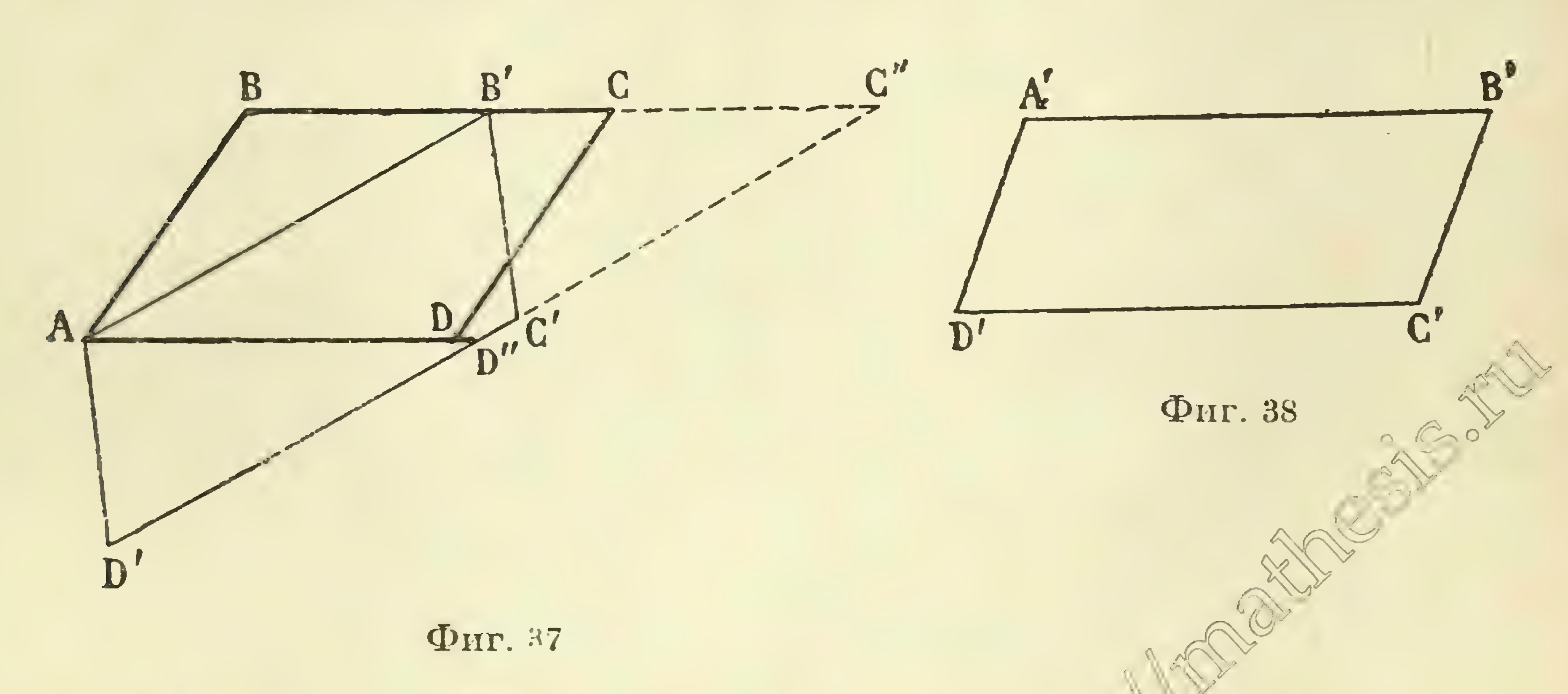
прямыя, соотвѣтственно параллельныя сторонамъ параллелограмма AB′C′D и параллелограмма ABCD; многоугольники, полученные при этомъ построеніи въ каждомъ изъ параллелограммовъ, соотвѣтственно равны.



Фиг. 36

Въ первомъ построеніи число элементовъ меньше, но слѣдуетъ замѣтить, что при соотвѣтствующей группировкѣ полученныхъ во второй разъ элементовъ 1, 2 и 3, 4 и 5, 6 получатся тѣ же части, что и въ предыдущемъ рѣшеніи.

II. Фигуры A и B суть равновеликіе параллелограммы. —Пусть будутъ даны равновеликіе параллелограммы ABCD и A′B′C′D′. Очевидно, что бо̀льшая сторона A′B′ второго парал-

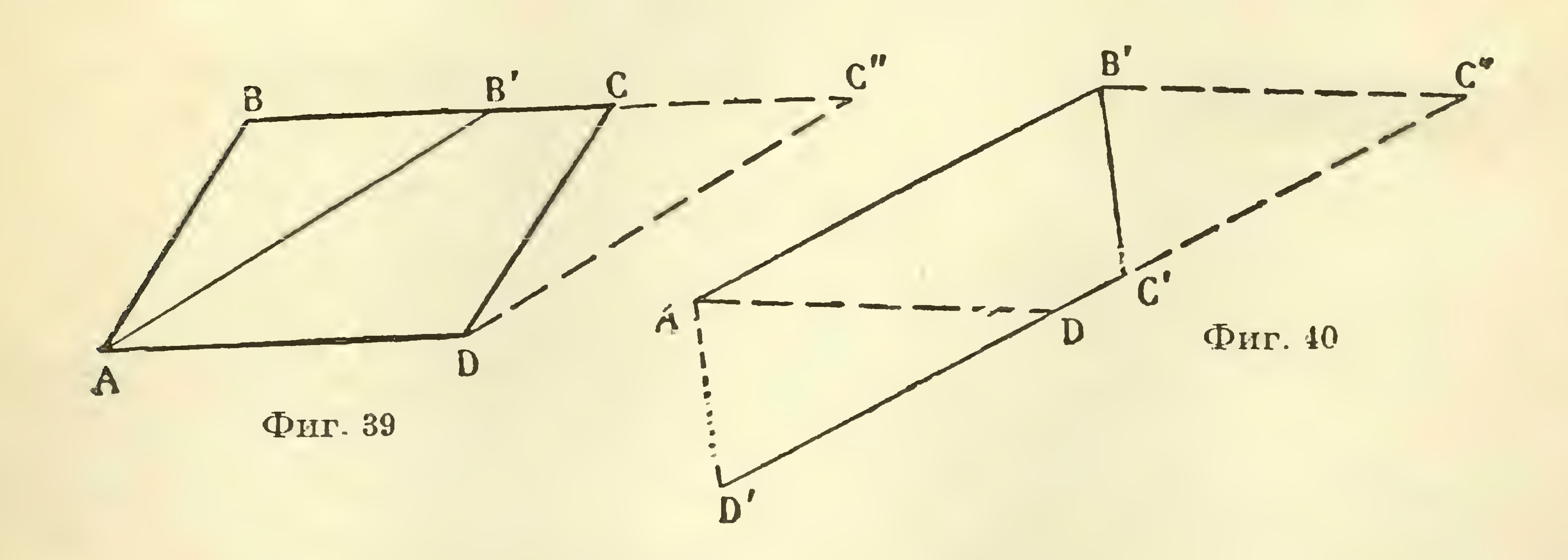


Фиг. 37

Фиг. 38

лелограмма больше меньшей изъ высотъ перваго и потому можетъ быть вписана между двумя основаніями AD и BC, соотвѣтствующими этой высотѣ, т. е. можетъ занять положеніе AB′.

Предположимъ, что параллелограммъ $A'B'C'D'$ занимаетъ положеніе $A'B'C'D'$ и пусть C'' и D'' будутъ точками пересѣченія прямой $C'D'$ съ прямыми BC и AD. Параллелограммъ



Фиг. 39

Фиг. 40

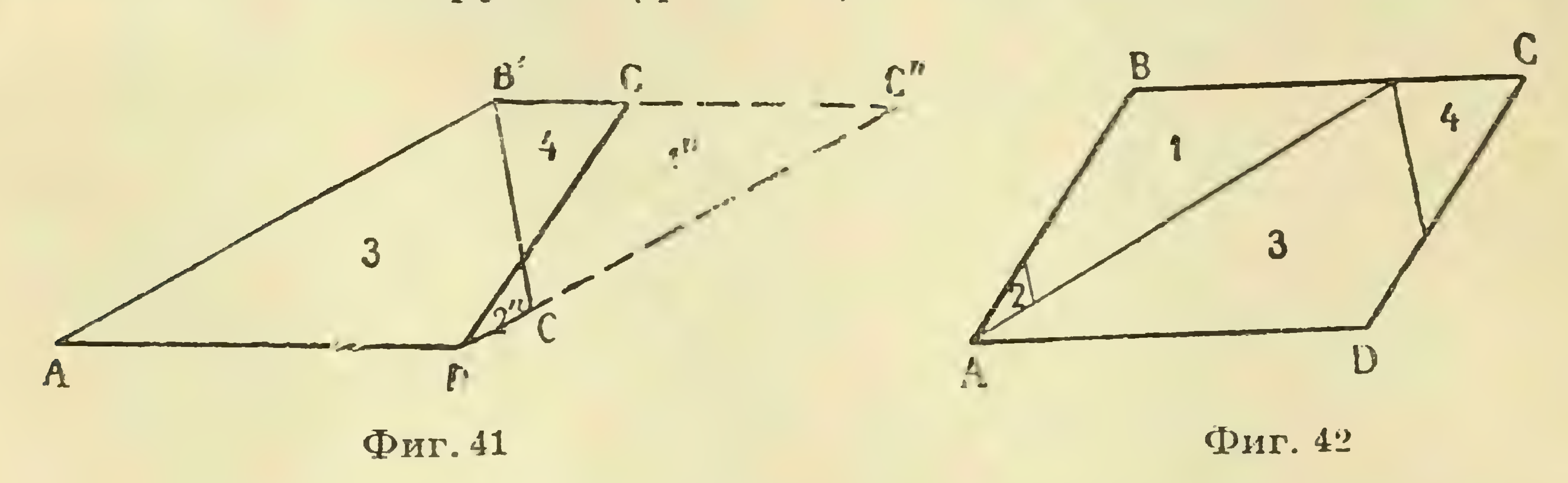
$AB'C''D''$, равновеликій параллелограмму $A'B'C'D'$, равновеликъ, слѣдовательно, и параллелограмму $ABCD$. Параллелограммы $ABCD$ и $AB'C''D''$, имѣющіе одну и ту же высоту, имѣютъ также и одно основаніе, такъ что прямая $AD'' = AD$, поэтому прямая $D'C'$ проходитъ черезъ точку D.

Мы можемъ, слѣдовательно, вписать два данные параллелограмма одинъ въ другой такъ, чтобы они имѣли общую вершину A и чтобы въ каждомъ изъ нихъ одна изъ сторонъ, проходящихъ черезъ точку A, была заключена между двумя противоположными сторонами другого параллелограмма.

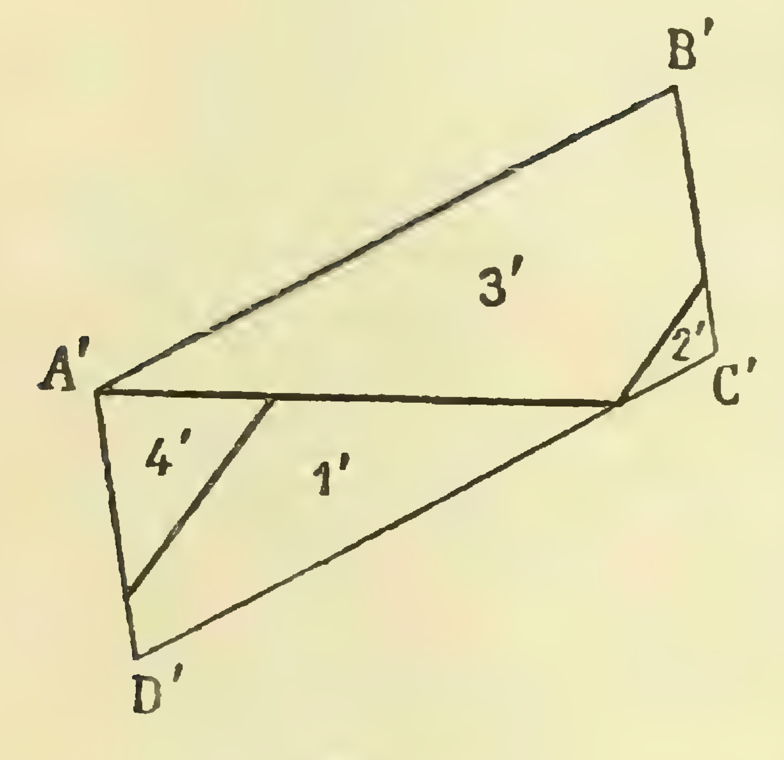
Сдѣлавъ это, мы покажемъ, какъ можно дѣйствительно разложить параллелограммъ $ABCD$ такъ, чтобы при новомъ расположеніи элементовъ можно было получить параллелограммъ $A'B'C'D'$. Для упрощенія построенія предположимъ, что намъ даны условія случая 1-го, I.

Сначала перейдемъ отъ параллелограмма $ABCD$ къ параллелограмму $AB'C''D$, отрѣзая треугольникъ ABB' и приводя его въ положеніе DCC'' (фиг. 39). Затѣмъ перейдемъ отъ параллелограмма $A'B'C'D'$ (или отъ $AB'C'D'$) къ параллелограмму $AB'C''D$, отрѣзая треугольникъ ADD' и перенося его въ положеніе $B'C''C'$ (фиг. 40).

Наложимъ теперь эти два разложенія параллелограмма AB′C″D одно на другое (фиг. 41) и разрѣжемъ эту послѣднюю



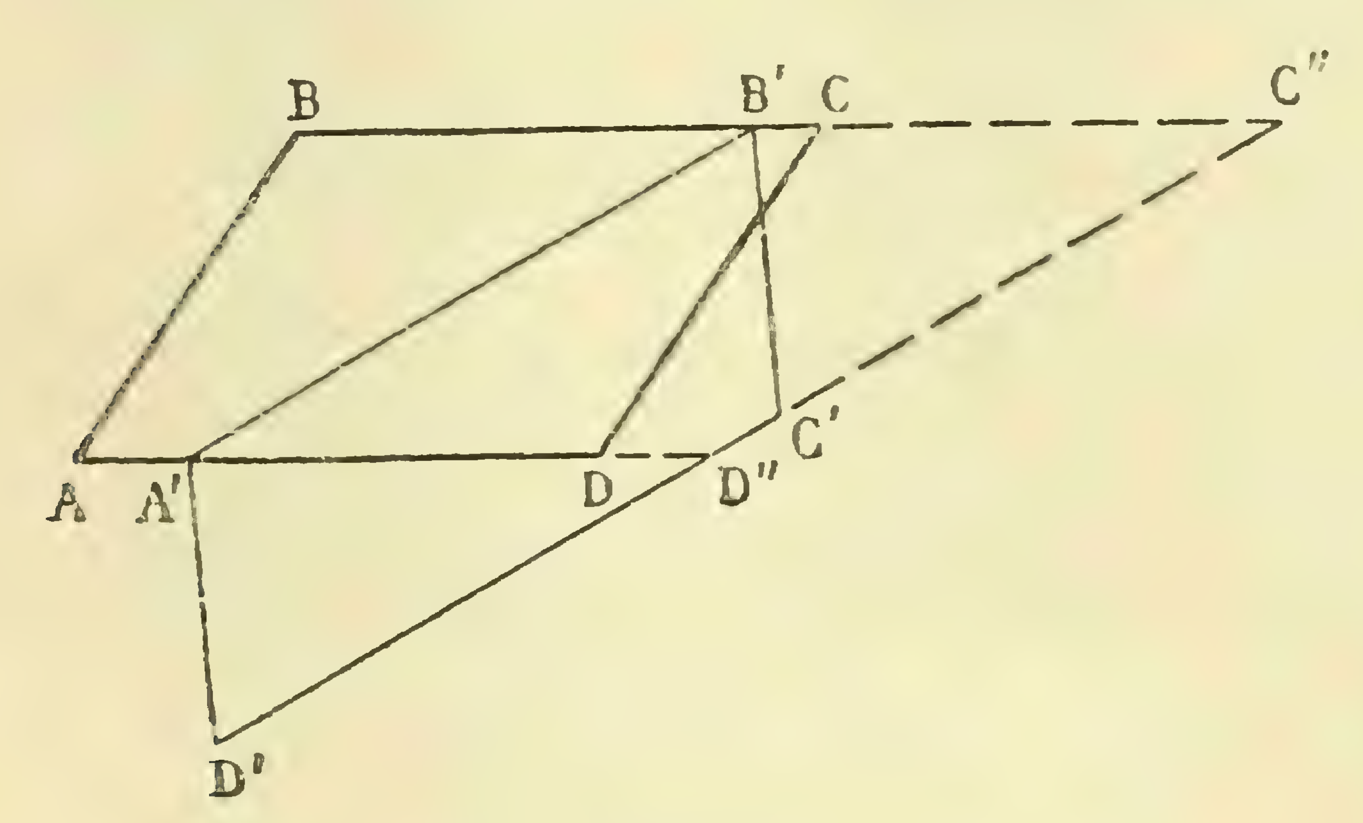
Фиг. 41 Фиг. 42



Фиг. 43

фигуру по прямымъ B′C′ и CD; такимъ образомъ мы получимъ 4 элемента, которые позволятъ перейти непосредственно отъ параллелограмма ABCD къ параллелограмму A′B′C′D′. Фигуры 42 и 43 даютъ расположенія этихъ элементовъ, соотвѣтствующія параллелограммамъ ABCD и A′B′C′D′.

Замѣчаніе.— 1°. На фигурѣ 37 видно, что параллелограммы AB′C′D′ и AB′C″D″ имѣютъ общее основаніе AB′ и что противоположныя основанія C′D′ и C″D″ лежатъ на одной прямой. Это условіе, очевидно, выполняется, если точка A′ совпадаетъ съ какою-либо точкой прямой AD, отличной отъ точки A: параллелограммъ, служащій для сравненія параллелограммовъ ABCD и A′B′C′D′, занимаетъ теперь положеніе A′B′C″D″ (фиг. 44).



Фиг. 44

Можно безъ труда распространить и на этотъ случай разложеніе, данное на фигурахъ 39—43; мы еще встрѣтимъ впослѣдствіи его примѣненіе.

2^{0}. Какъ мы уже упоминали, рѣшеніе Монтукла (§ 2) задачи о превращеніи прямоугольника въ равновеликій квадратъ есть лишь частный случай только-что изложеннаго построенія, которое имѣетъ цѣлью превратить параллелограммъ въ равновеликій параллелограммъ.

III. Фигуры A и B суть равновеликіе треугольникъ и параллелограммъ съ общимъ основаніемъ.—Пусть ABC и ADEC будутъ данные треугольникъ и параллелограммъ. Черезъ точку B проведемъ прямую BG, параллельную прямой AD, при чемъ BG = AD = EC. Треугольники BGF и ADF, BGH и CEH соотвѣтственно равны.

Фиг. 45

Можно перейти отъ треугольника ABC къ параллелограмму ADEC, перенося треугольникъ BGF въ положеніе ADF и треугольникъ BGH въ положеніе CEH.

IV. Фигуры A и B суть равновеликіе многоугольникъ и параллелограммъ.—Пусть будетъ данъ многоугольникъ ABCDE...X. Проведемъ діагональ AC. Треугольникъ ABC можно превратить въ равновеликій параллелограммъ IHCA (III), одна сторона котораго IA лежитъ на прямой AX, а затѣмъ этотъ послѣдній параллелограммъ — въ треугольникъ JCA, сторона котораго JA опять лежитъ на прямой AX; для послѣдняго превращенія достаточно привести треугольникъ KHC въ положеніе KIJ, гдѣ точка J выбрана такъ, что отрѣзокъ IJ = AI, а точка K есть пересѣченіе прямыхъ HI и CJ.

Фиг. 46

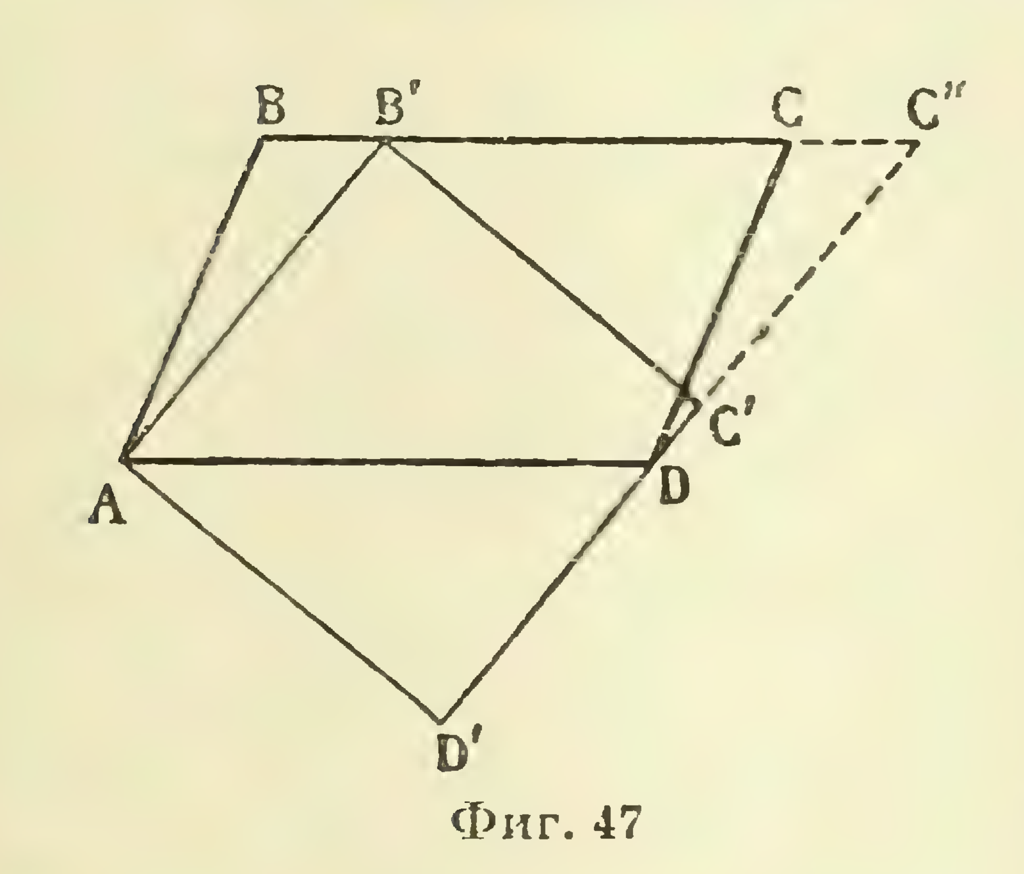
Итакъ, перемѣщая элементы, мы получимъ многоугольникъ AJCDE...X, равновеликій данному и имѣющій одной стороной меньше.

Поступая такимъ образомъ и дальше, мы, въ концѣ концовъ, получимъ треугольникъ, который можно будетъ разложить на элементы, воспроизводящіе данный параллелограммъ B.

V. Фигуры A и B суть равновеликіе многоугольники.— Преобразуемъ многоугольники A и B въ равновеликіе параллелограммы C и D; затѣмъ разложимъ параллелограммы C и D такъ, чтобы можно было перейти отъ одного изъ нихъ къ другому. Эти два разложенія, будучи наложены другъ на друга, дадутъ намъ элементы, которые позволятъ перейти непосредственно отъ многоугольника A къ многоугольнику B.

Примѣненія.—Опираясь на изложенные принципы, Гитель придумалъ нѣсколько группъ головоломокъ, сводящихся къ слѣдующей проблемѣ: *Данъ нѣкоторый многоугольникъ, требуется перемѣстить его элементы такъ, чтобы они образовали равновеликій квадратъ.*

Сначала превратимъ данную фигуру въ параллелограммъ ABCD, затѣмъ этотъ послѣдній во второй параллелограммъ AB′C″D, одна изъ сторонъ котораго и будетъ стороной равновеликаго квадрата; затѣмъ разложимъ этотъ квадратъ AB′C′D′ на части, которыя могутъ составить параллелограммъ AB′C″D. Налагая другъ на друга эти два разложенія параллелограмма AB′C″D, мы раздѣлимъ его на нѣкоторое число элементовъ, которые позволятъ намъ перейти непосредственно отъ данной фигуры къ квадрату AB′C′D′.



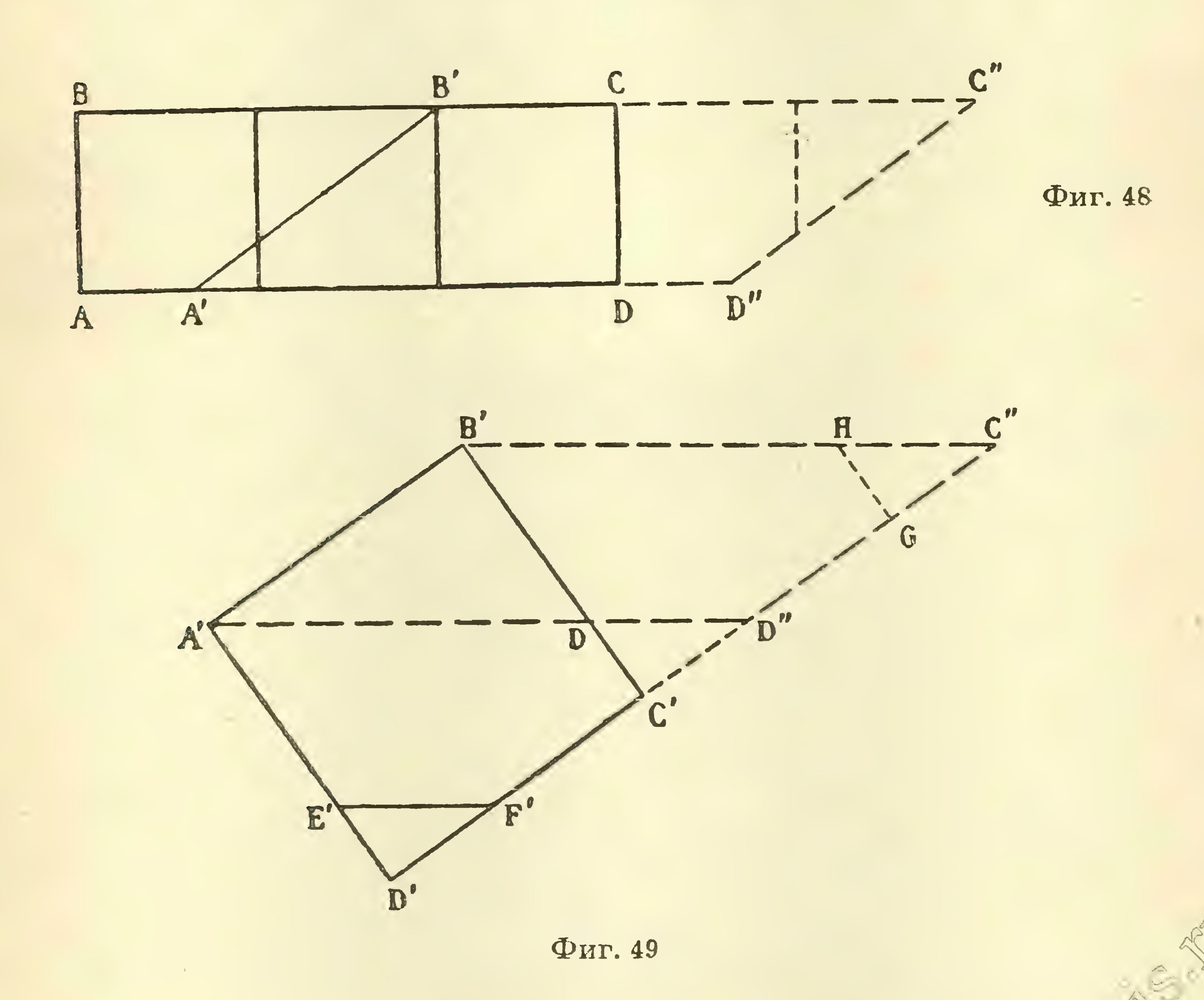
Фиг. 47

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно для упрощенія воспользоваться примѣчаніемъ 1⁰ изъ рубрики II, чтобы уменьшить число элементовъ.

Далѣе мы даемъ три примѣненія предыдущаго правила, выбранныя изъ тѣхъ, которыя намъ были любезно сообщены Гителемъ.

На нашихъ фигурахъ мы обозначимъ данный многоугольникъ жирными линіями, равновеликій ему квадратъ—тонкими линіями и, наконецъ, вспомогательный параллелограммъ—пунктиромъ.

Составить квадратъ изъ 3-хъ данныхъ равныхъ квадратовъ.—Приложимъ другъ къ другу три данные квадрата

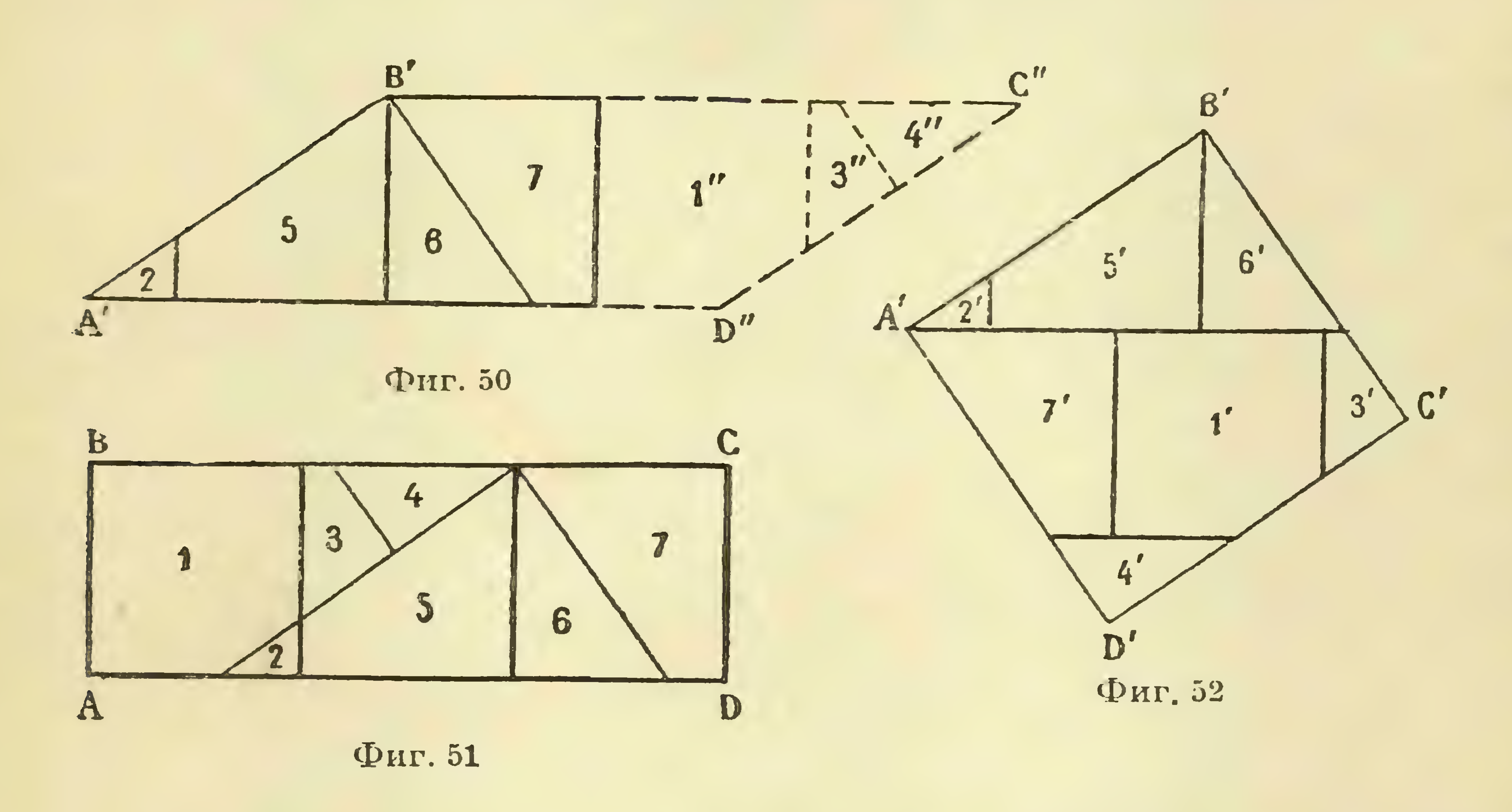


Фиг. 48

Фиг. 49

такъ, чтобы получился прямоугольникъ ABCD (фиг. 48); впишемъ затѣмъ въ этотъ прямоугольникъ сторону A′B′ равновеликаго квадрата такъ, чтобы точка B′ совпала съ верхней правой вершиной второго квадрата; такимъ образомъ получится наименьшее число элементовъ. (Если бы точка A′ совпадала съ точкой A, построеніе дало бы 8 элементовъ вмѣсто 7. См. § 2, рѣшеніе того же вопроса способомъ Монтукла).

Переходимъ отъ прямоугольника ABCD къ параллелограмму сравненія A′B′C″D″ (фиг. 48), перенося трапецію ABB′A′ въ положеніе DCC″D″. Отъ квадрата A′B′C′D′ переходимъ къ параллелограмму A′B′C″D″ (фиг. 49), откладывая (I, 2-ой случай) отрѣзокъ C″D″ отъ точки D″ до точки F′, проводя прямую F′E′, параллельную A′D″, перенося треугольникъ D′E′F′ въ положеніе C′DD″ и затѣмъ трапецію E′A′D″F′ въ положеніе DB′C″D″; отрѣзокъ D′E′ (или DC′) займетъ тогда положеніе GH.



Фиг. 50

Фиг. 51

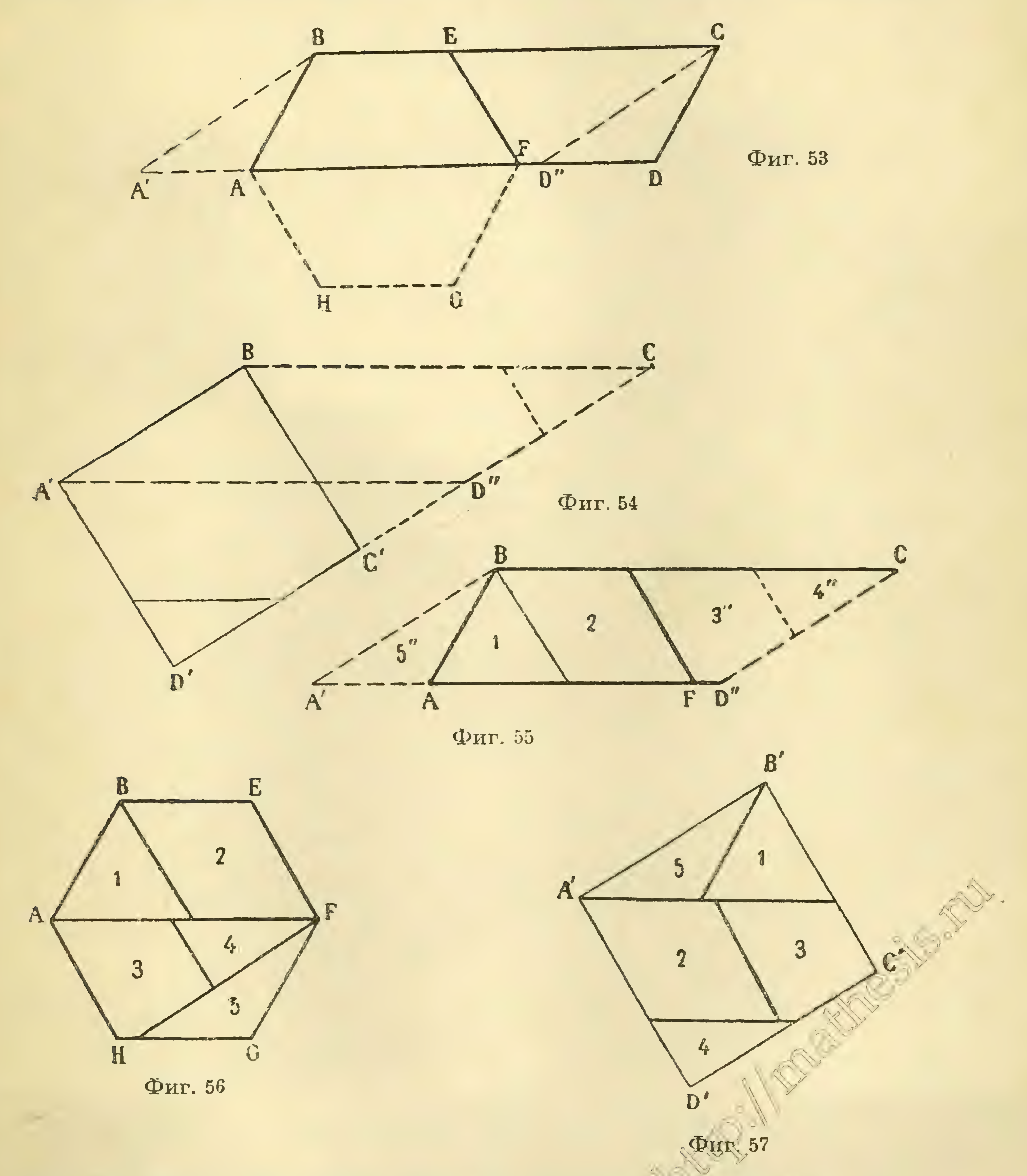
Фиг. 52

Накладывая два полученныя такимъ образомъ разложенія параллелограмма A′B′C″D″ (фиг. 50), мы получимъ 7 элементовъ, которые позволятъ перейти непосредственно отъ прямоугольника ABCD къ квадрату A′B′C′D′. На фигурахъ 51 и 52 видно, какъ нужно расположить эти элементы, чтобы получить прямоугольникъ ABCD и квадратъ A′B′C′D′.

Превратить правильный шестиугольникъ въ квадратъ.— Раздѣлимъ данный шестиугольникъ ABEFGH на двѣ равнобочныя трапеціи, которыя мы приложимъ другъ къ другу такъ, чтобы получить параллелограммъ ABCD (фиг. 53).

Затѣмъ поступимъ такъ же, какъ и въ предыдущей за-

дачѣ. Приведенныя фигуры 53—57 намъ кажутся настолько



Фиг. 53

Фиг. 54

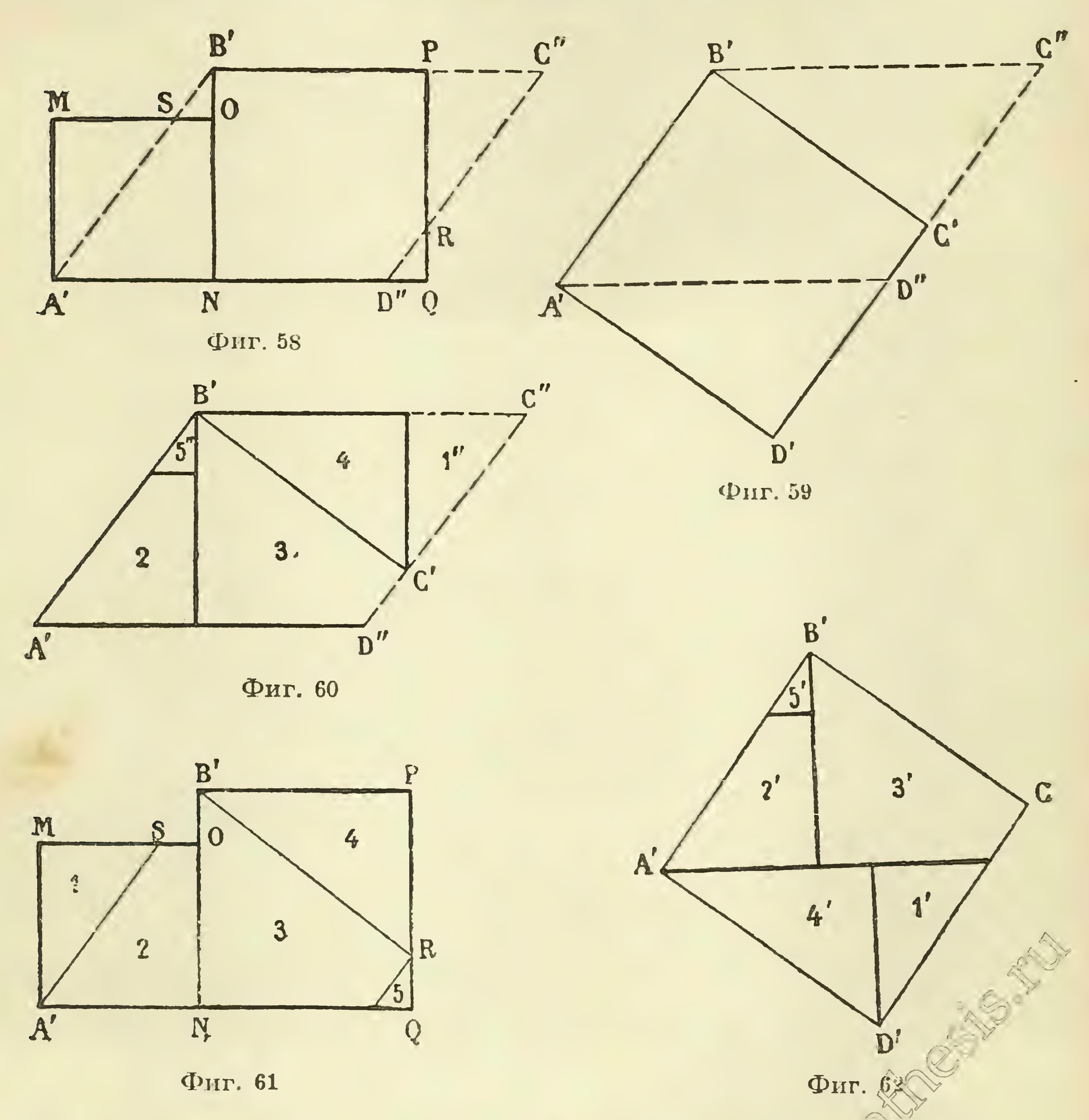
Фиг. 55

Фиг. 56

Фиг. 57

ясными, что всякія объясненія мы считаемъ излишними.

Превратить въ квадратъ фигуру, составленную изъ двухъ неравныхъ, приложенныхъ другъ къ другу квадратовъ. — Пусть будутъ даны два неравные квадрата A′MON и NB′PQ, прило-



Фиг. 58

Фиг. 59

Фиг. 60

Фиг. 61

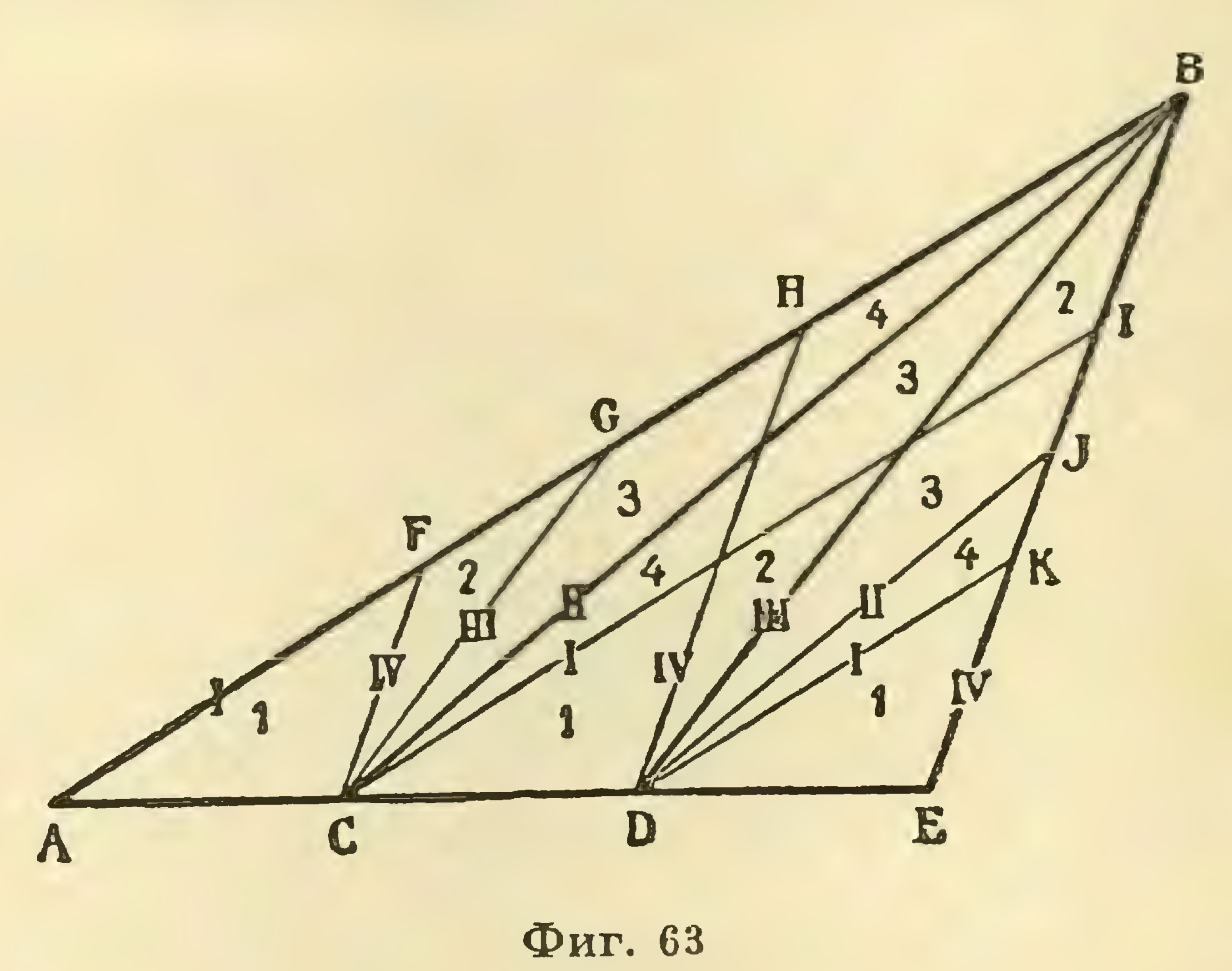
Фиг. 62

женные другъ къ другу такъ, какъ показано на фиг. 58. Извѣстно изъ теоремы Пиѳагора, что прямая A′B′ есть сторона квадрата, равновеликаго фигурѣ, составленной изъ двухъ квадратовъ. Пусть S будетъ точкой пересѣченія прямыхъ MO и A′B′ (фиг. 58). Отложимъ на продолженіи стороны B′P отрѣ-

зокъ $PC'' = MS$ и черезъ точку C'' проведемъ прямую $C''D''$, параллельную $B'A'$; легко убѣдиться въ томъ, что параллелограммъ $A'B'C''D''$ равновеликъ фигурѣ, составленной двумя квадратами; $A'B'C''D''$ есть, слѣдовательно, параллелограммъ сравненія. Кончаемъ такъ же, какъ и въ предыдущей задачѣ.

Различные вопросы.—*Дано нѣсколько треугольниковъ* ABC, CBD, DBE,..., *имѣющихъ общую вершину и равныя основанія* AC, CD, DE, *лежащія на одной прямой; если черезъ точки* C, D,... *проведемъ прямыя, параллельныя сторонамъ, проходящимъ черезъ общую вершину, то разобьемъ каждый изъ треугольниковъ на соотвѣтственно конгруэнтные элементы* (Gerwien).

Мы обозначили на фиг. 63 прямыя, параллельныя какой-либо сторонѣ, и самую сторону одной и той же римской цифрой, а конгруэнтные элементы—одной и той же арабской цифрой. Всѣ эти элементы соотвѣтственно равны между собою, такъ какъ углы ихъ соотвѣтственно равны и стороны ихъ также соотвѣтственно равны (отрѣзки параллельныхъ между равноотстоящими другъ отъ друга параллельными).

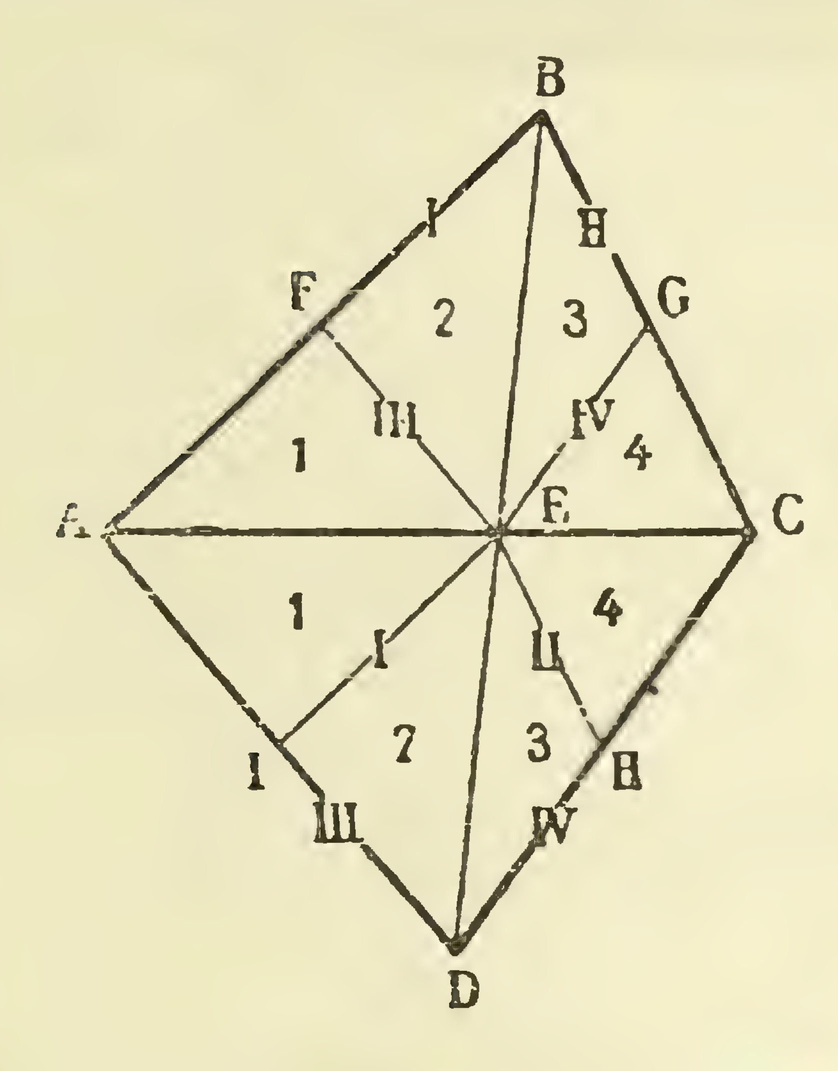


Фиг. 63

Два треугольника ABC *и* ADC *имѣютъ общее основаніе* AC *и равныя высоты; ихъ можно разложить на конгруэнтные элементы* (Gerwien).

Это предложеніе лежитъ въ основѣ Гервиновскаго способа разложенія равновеликихъ многоугольниковъ на конгру-

энтные элементы. Различаютъ три случая, смотря по тому, пересѣкаетъ ли прямая BD прямую AC между точками A и C, въ точкѣ C или внѣ AC. Мы разсмотримъ здѣсь лишь 1-й случай: 2-ой есть предѣльный случай перваго, въ третьемъ случаѣ построеніе очень сложно, и поэтому мы его опустимъ.



Фиг. 64

Пусть E будетъ точкой пересѣченія прямыхъ BD и AC; проведемъ въ каждомъ треугольникѣ черезъ эту точку прямыя, параллельныя сторонамъ другого треугольника. Данные треугольники будутъ такимъ образомъ разложены на конгруэнтные элементы.

БИБЛІОГРАФІЯ

Gerwien.—*Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke.* J[al] für d. reine u. ang. Mathem. (Crelle). Berlin, 1833.

H. Sévène.—*Note sur un problème de géometrie élémentaire.* Nouv. Ann. Math., 1867.

E. Guitel.—*Propriétés relatives aux polygones équivalents.* Assoc. fr. p. l'av. des Sciences, 1895.

L. S. de la Campa.—*Sur les polygones équivalents.* Revista cientifico-militar. Barcelone, 18 5.

Elling Holst.—*Décomposition de polygones équivalents en parties superposables.* Interméd. des mathématiciens, 1896.

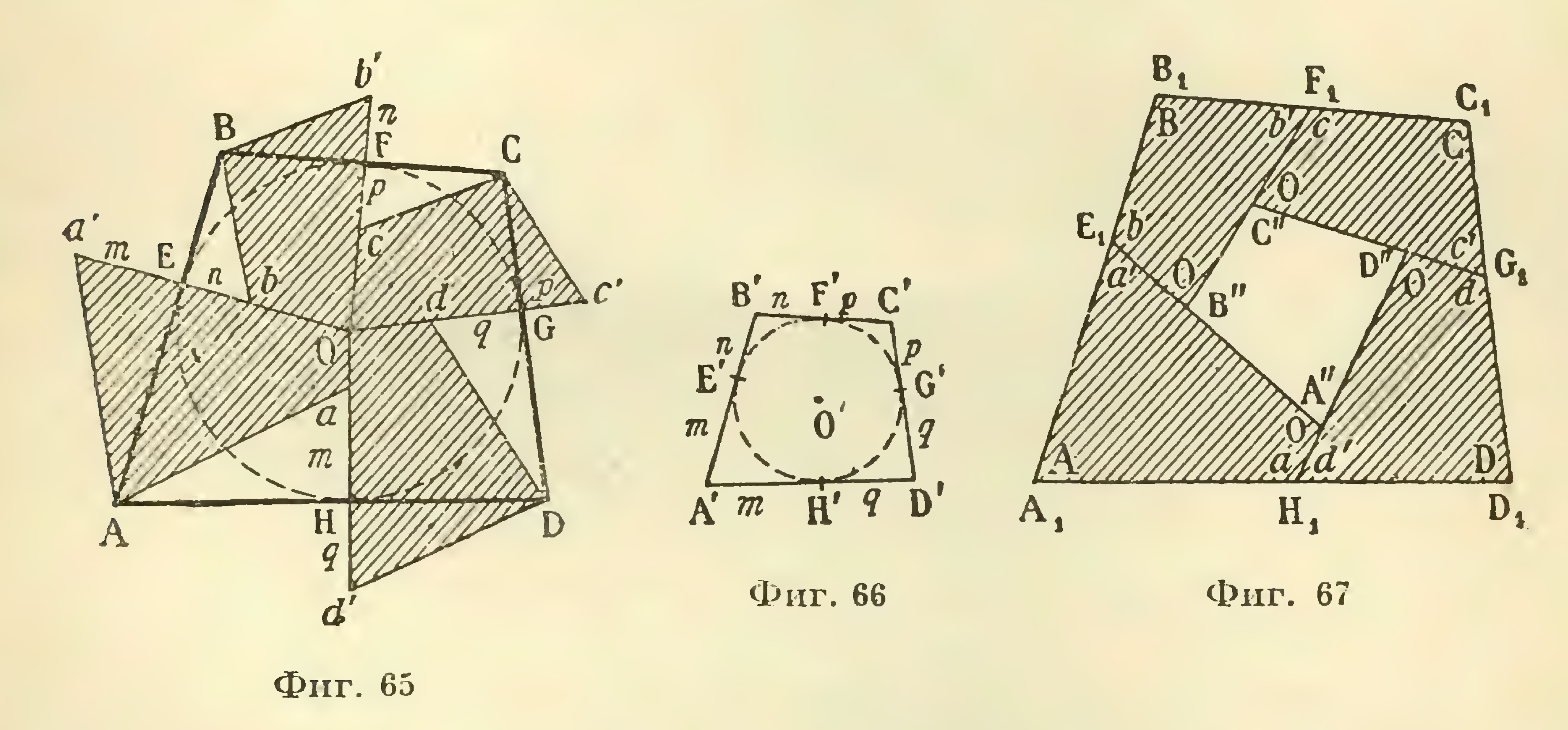
§ 4.—Задача Гарта

Гартъ (Hart) предложилъ въ 1877 году слѣдующую задачу, которую онъ рѣшилъ лишь въ частномъ случаѣ описанныхъ и вписанныхъ многоугольниковъ.

Даны два подобныхъ многоугольника; разложить большій изъ нихъ такъ, чтобы, располагая соотвѣтствующимъ образомъ полученные элементы, можно было составить

третій многоугольникъ, подобный двумъ даннымъ и заключающій внутри себя меньшій изъ двухъ многоугольниковъ.

I. *Описанные многоугольники.* — Пусть ABCD... (фиг. 65) и A′B′C′D′... (фиг. 66) будутъ два подобныхъ многоугольника; точки E, F, G, H,... и E′, F′, G′, H′,... пусть будутъ точками касанія окружностей, вписанныхъ въ эти многоугольники. Опустимъ изъ центра O перпендикуляры OE, OF, OG, OH,... на стороны многоугольника ABCD... и обозначимъ соотвѣтственно черезъ m, n, p, q,... разстоянія отъ вершинъ A′, B′, C′, D′,... до точекъ касанія E′, F′, G′, H′,....



Фиг. 65

Фиг. 66

Фиг. 67

Отложимъ теперь на прямой OE внѣ многоугольника ABCD... и на радіусѣ OH внутри того же многоугольника (четыреугольникъ AEOH гомологиченъ четыреугольнику A′E′O′H′, въ которомъ отрѣзокъ A′E′ = A′H′ = m) длины Ea' и Ha, равныя m. Отложимъ также отрѣзки Eb = Fb' = n, Fc = Gc' = p, Gd = = Hd' = q,... Прямоугольные треугольники AHa и AEa', BEb и BFb',... соотвѣтственно равны; отсюда слѣдуетъ, что сумма площадей заштрихованныхъ четыреугольниковъ фиг. 65 равновелика площади ABCD... Мы покажемъ, что эти четыреугольники, расположенные такъ, какъ указано на фиг. 67, образуютъ многоугольникъ $A_1B_1C_1D_1$..., подобный даннымъ многоугольникамъ, и облегаютъ пустое пространство A″B″C″D″..., равное многоугольнику A′B′C′D′...

Дѣйствительно, во-первыхъ, линіи $A_1E_1B_1$, $B_1F_1C_1$,...(фиг. 67) суть прямыя линіи, такъ какъ, напримѣръ, треугольники AEa' и BEb (фиг. 65) подобны, содержа по равному углу при вершинѣ E между пропорціональными сторонами: $\frac{AE}{m}=\frac{EB}{n}$; отсюда слѣдуетъ, что углы $Aa'O$ и BbO дополняютъ другъ друга до двухъ прямыхъ угловъ и что отрѣзки A_1E_1 и E_1B_1 (фиг. 67) лежатъ на одной прямой.

Во-вторыхъ, многоугольникъ $A_1B_1C_1D_1$... подобенъ двумъ другимъ, такъ какъ $\angle A_1=\angle A$, $\angle B_1=\angle B$,... и легко вывести изъ подобія треугольниковъ, что

$$\frac{Aa'+Bb}{AB}=\frac{Bb'+Cc}{BC}=\cdots \text{ или } \frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\cdots$$

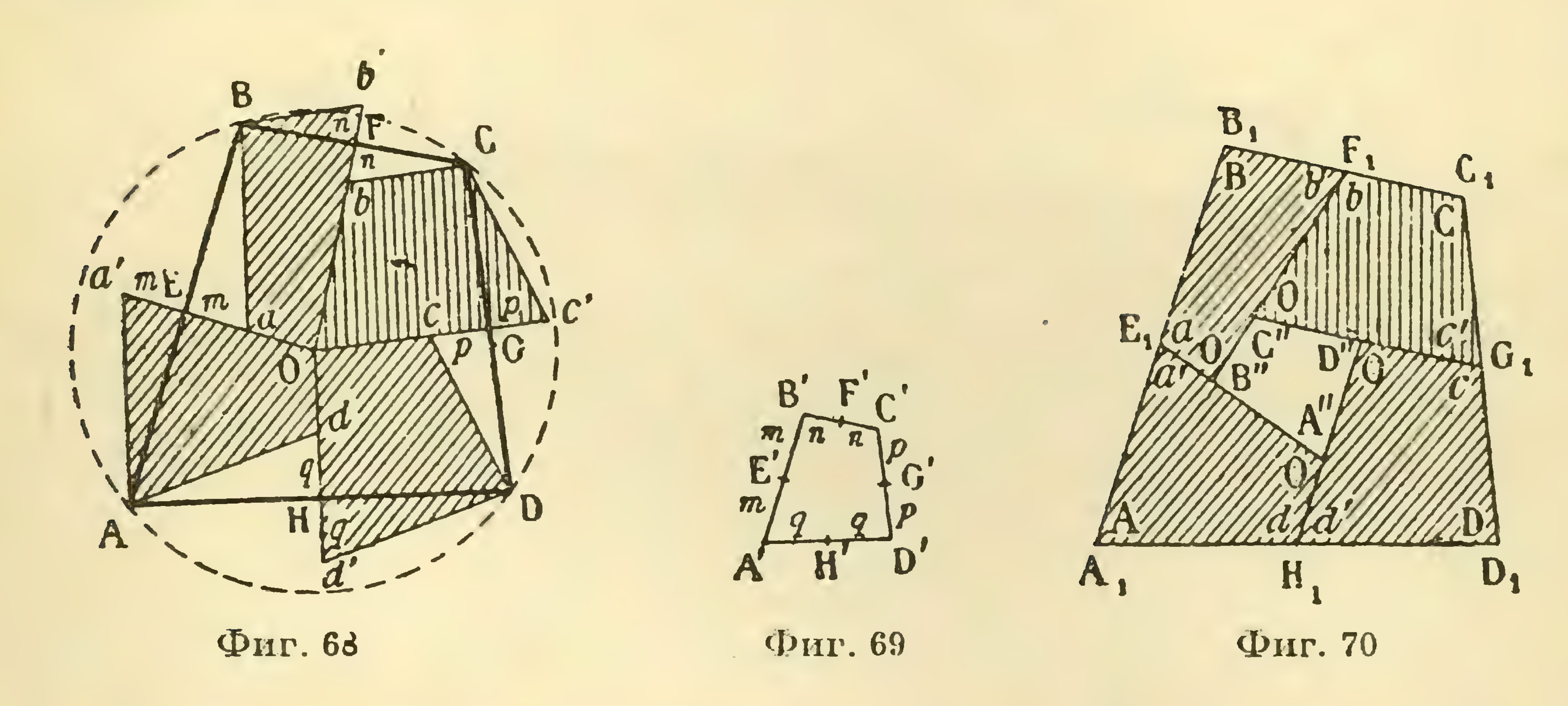
Наконецъ, многоугольникъ $A''B''C''D''$... равенъ многоугольнику $A'B'C'D'$..., ибо, напримѣръ, $\angle A''=\angle A$, какъ дополненія къ одному и тому же углу $E_1A''H_1$ (фиг. 67) или углу EOH (фиг. 65) и сторона $A''B''$ (фиг. 67) равна (фиг. 65) отрѣзку $a'b=m+n=A'B'$ (фиг. 66).

Многоугольникъ $A_1B_1C_1D_1$... также описанный, и точки E_1, F_1, G_1, H_1,... суть точки касанія вписанной окружности.

Построеніе возможно лишь при томъ условіи, что наибольшій изъ отрѣзковъ, опредѣляемыхъ на сторонахъ многоугольника $A'B'C'D'$... точками касанія окружности, вписанной въ этотъ многоугольникъ, пусть это будетъ отрѣзокъ $A'E'$ или равный ему отрѣзокъ $A'H'$, меньше радіуса круга вписаннаго въ многоугольникъ ABCD...

II. *Вписанные многоугольники.*—Пусть ABCD... и $A'B'C'D'$... будутъ два данныхъ вписанныхъ многоугольника, точки E, F, G, H,... и E', F', G', H',...—середины ихъ сторонъ, O—центръ круга, описаннаго около многоугольника ABCD.... Прямыя OE, OF, OG, OH,..., какъ извѣстно, перпендикулярны къ сторонамъ многоугольника ABCD.... Отложимъ на этихъ перпендикулярахъ съ одной и другой стороны отъ точекъ E, F,... дли-

ны Ea = Ea', Fb = Fb',..., соотвѣтственно равныя половинамъ сторонъ A′B′, B′C′,....



Фиг. 68 Фиг. 69 Фиг. 70

Прямоугольные треугольники AEa' и BEa, BFb' и CFb,... соотвѣтственно равны, и заштрихованные четыреугольники фигуры 68, будучи расположены, какъ это указано на фиг. 70, образуютъ многоугольникъ $A_1B_1C_1D_1$..., подобный даннымъ многоугольникамъ, и охватываютъ пустое пространство A″B″C″D″..., равное многоугольнику A′B′C′D′... Многоугольникъ $A_1B_1C_1D_1$... есть вписанный многоугольникъ, и точки E_1, F_1, G_1, H_1,... суть середины его сторонъ. Доказательство вполнѣ аналогично доказательству въ рѣшенiи предыдущей задачи.

Построенiе возможно лишь при условiи, что длина каждаго изъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра O на середины сторонъ многоугольника ABCD..., бо́льше половины соотвѣтствующей стороны многоугольника A′B′C′D′...

БИБЛIОГРАФIЯ

Harry Hart.—*Geometrical dissections and transpositions*. Messenger of Mathem., 1877.

ГЕОМЕТРИЧЕСКІЕ ПАРАЛОГИЗМЫ

Великій греческій геометръ Евклидъ (3-ій в. до Р. Х.) написалъ работу подъ заглавіемъ *Псевдарія (Pseudaria)*; въ ней онъ изложилъ различные виды ложныхъ разсужденій, которыя часто встрѣчаются у начинающихъ изучать геометрію. Эта работа не дошла до насъ.

Въ дальнѣйшемъ мы разсмотримъ нѣсколько вопросовъ, повидимому, аналогичныхъ тѣмъ, о которыхъ говорилъ александрійскій ученый въ указанномъ сочиненіи, съ цѣлью показать, что и это сочиненіе было не безполезно, и что слѣдуетъ предостерегать начинающихъ противъ слишкомъ поспѣшныхъ построеній и разсужденій.

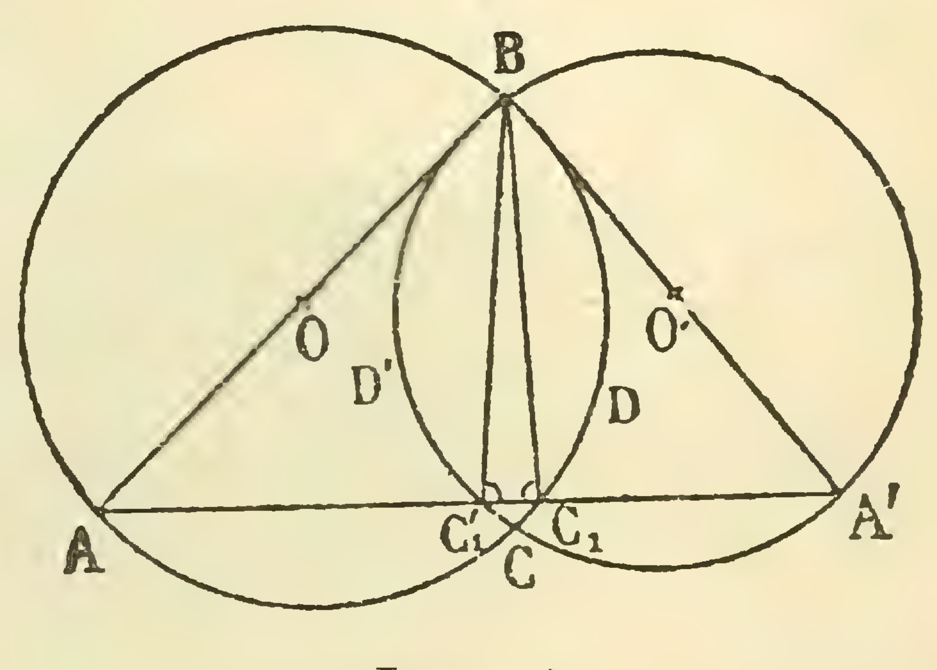
§ 1. — Ошибки въ построеніи.

Геометріи часто давали юмористическое опредѣленіе, говоря, что она есть *„искусство правильно разсуждать на неправильныхъ чертежахъ"*. Слѣдующіе паралогизмы покажутъ намъ, что не слѣдуетъ принимать этого опредѣленія слишкомъ буквально и что доказательство, въ которомъ всѣ послѣдовательные выводы безупречны, но которое построено на неправильномъ чертежѣ, можетъ привести къ абсурдному заключенію.

Поэтому при изысканіи рѣшенія вопроса полезно выполнять геометрическіе чертежи по возможности точно; это даетъ часто возможность открыть незамѣченныя раньше взаимоотношенія между линіями данной фигуры.

I. Изъ точки, взятой внѣ прямой, можно провести два перпендикуляра къ этой прямой. — Допустимъ, что намъ дѣйствительно даны двѣ окружности центровъ O и O′,

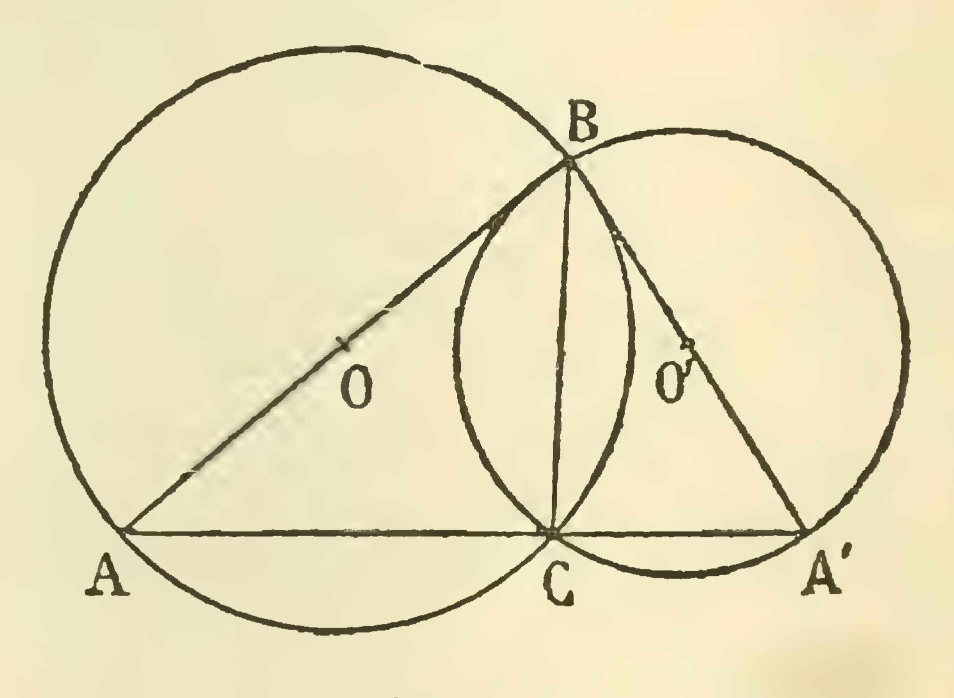
которыя пересѣкаются въ точкахъ B и C и которыя мы предположимъ проведенными отъ руки такъ же, какъ и всѣ линіи фигуры 71. Проведемъ прямыя BO и BO′ и продолжимъ ихъ до пересѣченія съ окружностями въ точкахъ A и A′. Проведемъ затѣмъ прямую AA′, которая *встрѣтитъ* дуги BDC и BD′C *соотвѣтственно* въ точкахъ C_1 и C_1'.



Фиг. 71

Углы BC_1A и $BC_1'A'$ суть углы, вписанные въ полуокружность и, слѣдовательно, оба прямые. Такимъ образомъ мы провели черезъ точку B два перпендикуляра BC_1' и BC_1 къ прямой AA′.

Опроверженіе. — Сдѣланная ошибка произошла оттого, что прямая AA′ проходитъ въ дѣйствительности черезъ точку пересѣченія C двухъ окружностей, въ чемъ легко убѣдиться, строя чертежъ при помощи циркуля и линейки. Мы докажемъ *логически*, что это такъ и должно быть. Отсюда будетъ слѣдовать, что BC есть единственный перпендикуляръ, который можетъ быть опущенъ изъ точки B на прямую AA′.

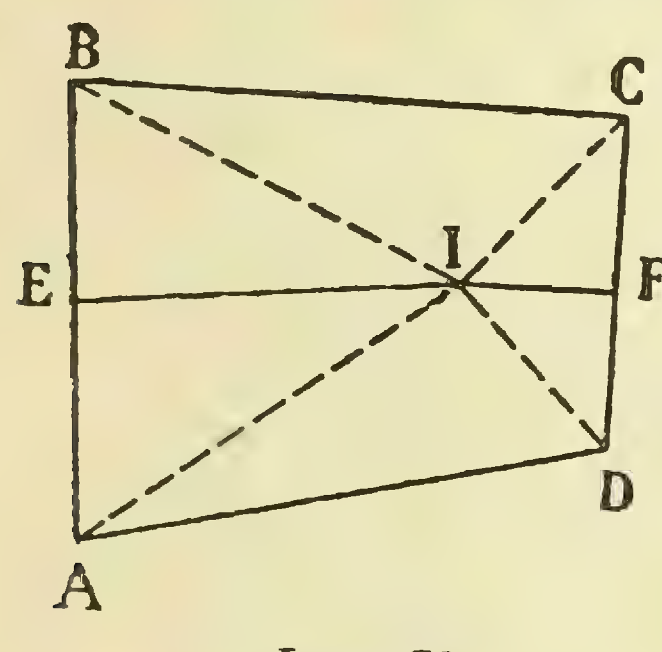


Фиг. 72

Соединимъ, дѣйствительно, точки A и A′ съ точкой C; углы ACB и A′CB, какъ вписанные въ полуокружности, — прямые: сумма ихъ равна двумъ прямымъ. Поэтому ACA′ есть прямая линія. Слѣдовательно, единственная прямая, опредѣляемая точками A и A′, проходитъ черезъ точку C.

II. Тупой уголъ равенъ прямому (*Mathesis*, 1892, p. 161— *Education mathématique* des 1-er octobre 1898 et 15 juillet 1906).—Разсмотримъ четыреугольникъ ABCD, въ которомъ уголъ C прямой, уголъ D тупой, а противоположныя стороны

BC и AD равны. Возставимъ изъ techнъ E и F сторонъ AB и CD перпендикуляры къ этимъ прямымъ; эти перпендикуляры не могутъ быть параллельны, потому что, въ противномъ случаѣ, стороны AB и CD также были бы параллельны, уголъ B былъ бы прямымъ, а такъ какъ AD = BC, то отрѣзокъ AD былъ бы кратчайшимъ разстояніемъ между параллельными прямыми AB и CD, вслѣдствіе чего уголъ D былъ бы прямымъ, что противорѣчитъ допущенію. Поэтому перпендикуляры, возставленные въ точкахъ E и F, встрѣтятся въ нѣкоторой точкѣ I. Можно сдѣлать лишь слѣдующія два предположенія: точка I лежитъ внутри или внѣ четыреугольника ABCD.



Фиг. 73

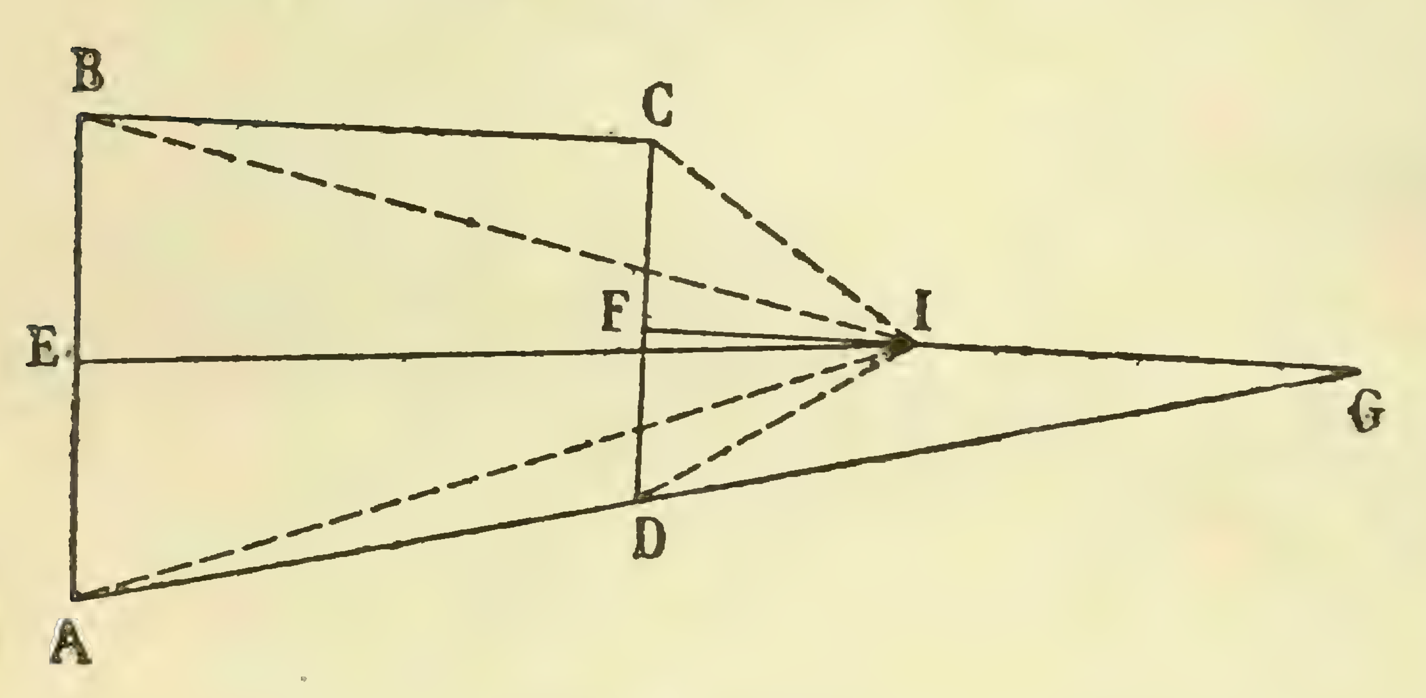
1⁰ Предположимъ сначала, что точка I лежитъ внутри четыреугольника ABCD (фиг. 73). Соединимъ эту точку съ четырьмя вершинами. Треугольники AID и BIC равны по тремъ сторонамъ, поэтому

$$\angle ADI = \angle BCI.$$

Если къ каждому изъ этихъ двухъ угловъ прибавить одинъ и тотъ же уголъ $\angle FDI = \angle FCI$, то получимъ:

тупой уголъ D = прямому углу C.

2⁰ Предположимъ теперь, что точка I лежитъ внѣ четыреугольника ABCD (фиг. 74). Соединимъ опять точку I съ четырьмя вершинами. Легко убѣдиться, какъ и раньше, въ томъ, что



Фиг. 74

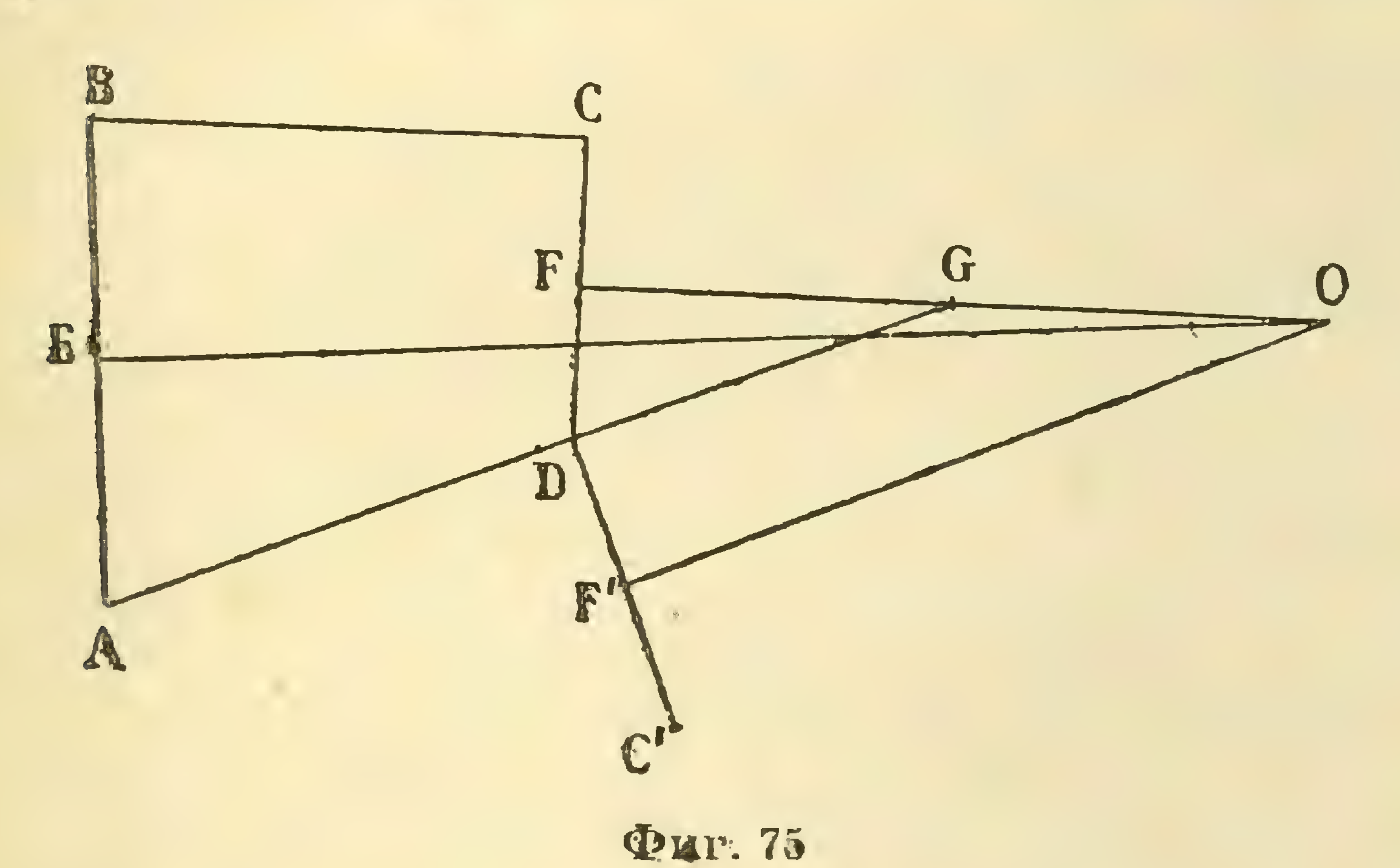
$$\angle ADI = \angle BCI.$$

Если отъ каждаго изъ этихъ угловъ отнять одинъ и тотъ же уголъ $\angle FDI = \angle FCI$, то получимъ

$$\angle D = \angle C.$$

Опровержeніе.—Достаточно показать, что *точка пересѣченія* I *перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ точекъ* E *и* F, *лежитъ съ той стороны прямой* AD, *гдѣ не находится сторона* BC. Такимъ образомъ мы докажемъ: для случая 1^0, что точка I не можетъ лежать внутри многоугольника ABCD, и для случая 2^0, что точка I должна лежать на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ точки F, не между точкой F и точкой G, въ которой сторона AD встрѣчаетъ этотъ перпендикуляръ (какъ это неясно предполагаетъ фиг. 74), но на продолженіи отрѣзка FG въ сторону точки G. Что касается, въ частности, этого послѣдняго случая, то треугольникъ AID оказывается повернутымъ относительно прямой AD, и вычитаніе угла FDI изъ угла ADI, которое послужило основаніемъ разсужденія, становится невозможнымъ.

Для того, чтобы доказать это предложеніе, отложимъ (фиг. 75) длину $DC' = DC$ на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ точки D къ прямой AD съ той стороны, гдѣ не находится BC; пусть точка O будетъ точкой встрѣчи перпендикуляровъ, возставленныхъ къ прямымъ DC и DC′ изъ ихъ серединъ F и F′. Точка O есть центръ окружности, проходящей

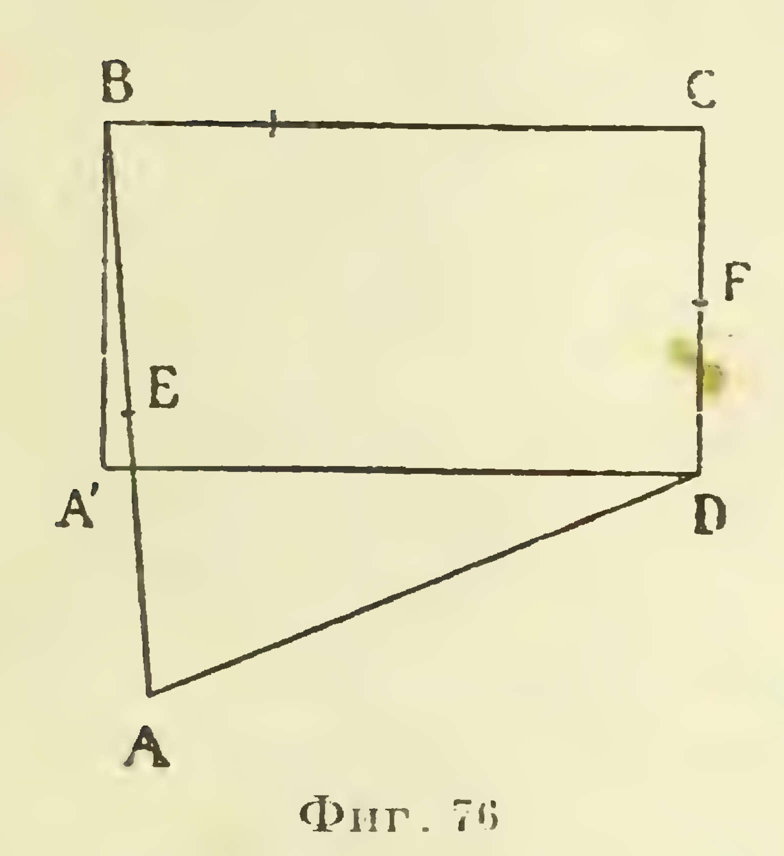


Фиг. 75

черезъ точки C, C′ и D. Если повернуть фигуру BCD около точки O такъ, чтобы точка C пришла въ положеніе D, то треугольникъ BCD перейдетъ въ положеніе ADC′ (по условію $AD = BC$). Такъ какъ точка B совпадетъ съ точкой A, а отрѣзокъ OB съ отрѣзкомъ OA, то перпендикуляръ, возставленный къ прямой AB изъ ея середины E, пройдетъ черезъ точку O. Такимъ образомъ, точка O пересѣченія перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ серединъ сторонъ AB и CD, есть не что иное, какъ точка I на чертежахъ 73 и 74. Такъ какъ точка O находится на пер-

пендикулярѣ, возставленномъ къ прямой DC′ изъ ея середины F′, то прямая OF′ параллельна прямой AD и находится по ту сторону AD, гдѣ не находится точка C. Слѣдовательно, точки O и C лежатъ по разныя стороны прямой AD.

Замѣчаніе. — Построеніе, о которомъ идетъ рѣчь, иногда представляется слѣдующимъ образомъ. Данъ прямоугольникъ A′BCD, черезъ одну изъ вершинъ D проведемъ произвольную прямую, на которой отложимъ отрѣзокъ DA = DA′. Затѣмъ изъ серединъ E и F прямыхъ AB и DC возставимъ перпендикуляры къ этимъ прямымъ.



Фиг. 76

Эти два способа въ сущности совершенно тождественны, но условіе, изъ котораго мы исходимъ, представляется нѣсколько болѣе простымъ.

III. Всѣ треугольники суть равнобедренные треугольники. *(Mathesis,* 1893). Данъ произвольный треугольникъ ABC, проведемъ биссектриссу BI угла B и возставимъ перпендикуляръ къ противоположной сторонѣ AC въ ея серединѣ D. Если эти прямыя не встрѣчаются, то онѣ параллельны; биссектрисса BI перпендикулярна къ основанію AC, и ABC есть равнобедренный треугольникъ.

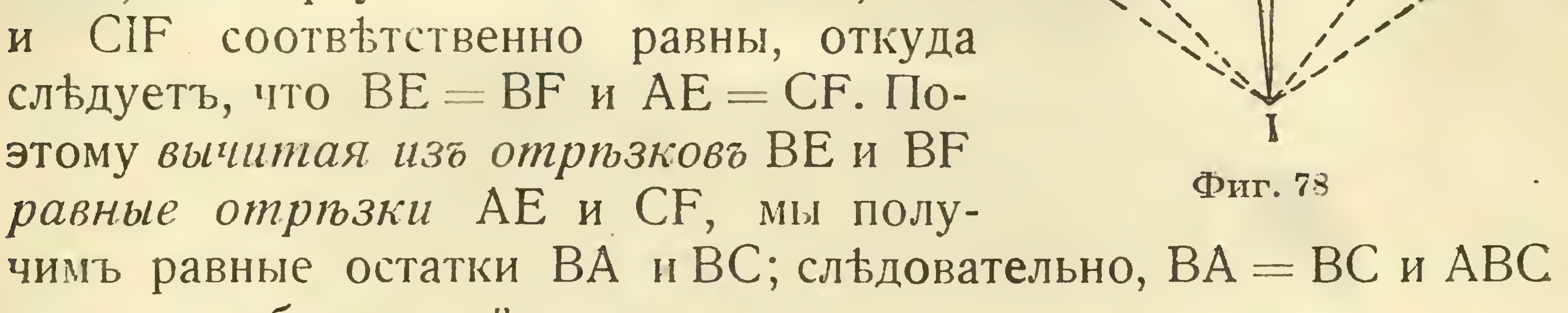
Если онѣ встрѣчаются въ нѣкоторой точкѣ I, то можно сдѣлать только два допущенія: точка I лежитъ внутри или внѣ треугольника ABC. Мы покажемъ, что въ каждомъ изъ этихъ случаевъ треугольникъ долженъ быть равнобедреннымъ.

Фиг. 77

1⁰. Предположимъ сначала, что точка I лежитъ внутри треугольника ABC и опустимъ изъ точки I перпендикуляры IE, IF на стороны AB и BC (фиг. 77); проведемъ прямыя IA и IC. Два прямоугольныхъ треугольника BIE и BIF равны, такъ какъ сторона BI у нихъ общая и углы при вершинѣ B

равны, слѣдовательно, BE = BF. Два прямоугольныхъ треугольника AIE, CIF также равны, ибо ихъ гипотенузы равны, IA = IC, и катеты равны, IE = IF; слѣдовательно, AE = CF. Поэтому, прибавляя къ равнымъ длинамъ BE и BF равные отрѣзки AE и CF, мы получаемъ равныя суммы BA и BC. Треугольникъ ABC, слѣдовательно, есть равнобедренный треугольникъ.

2⁰. Предположимъ теперь, что точка I лежитъ внѣ треугольника (фиг. 78); опустимъ перпенендикуляры IE, IF на прямыя AB и BC и проведемъ прямыя AI, IC. Убѣдимся, какъ и раньше, въ томъ, что треугольники BIE и BIF, AIE и CIF соотвѣтственно равны, откуда слѣдуетъ, что BE = BF и AE = CF. Поэтому *вычитая изъ отрѣзковъ* BE и BF *равные отрѣзки* AE и CF, мы получимъ равные остатки BA и BC; слѣдовательно, BA = BC и ABC есть равнобедренный треугольникъ.



Фиг. 78

Опроверженіе. — Ошибка происходитъ въ случаѣ 1⁰ оттого, что точка I не можетъ лежать внутри треугольника ABC; въ случаѣ 2⁰ — оттого, что, если точка F находится на продолженіи стороны BC (фиг. 78), то точка E должна находиться между точками A и B, а не на продолженіи стороны BA; такимъ образомъ, предыдущее доказательство невѣрно.

1⁰. Точка I не можетъ находиться внутри треугольника ABC. Дѣйствительно, опишемъ (фиг. 79) окружность около треугольника ABC; биссектрисса угла B и перпендикуляръ, возставленный къ сторонѣ AC изъ ея середины D, пересѣкутся въ точкѣ I, серединѣ дуги AIC; слѣдовательно, эта точка I должна лежать внѣ треугольника.

Фиг. 79.

2^0 Если точка F находится на продолженіи стороны BC, то точка E должна находиться между точками A и B. Дѣйствительно, изъ сдѣланнаго допущенія слѣдуетъ, что уголъ BCI тупой. Такъ какъ углы BCI и BAI дополняютъ другъ друга, то уголъ BAI острый; поэтому основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки I на сторону AB, должно находиться между точками A и B.

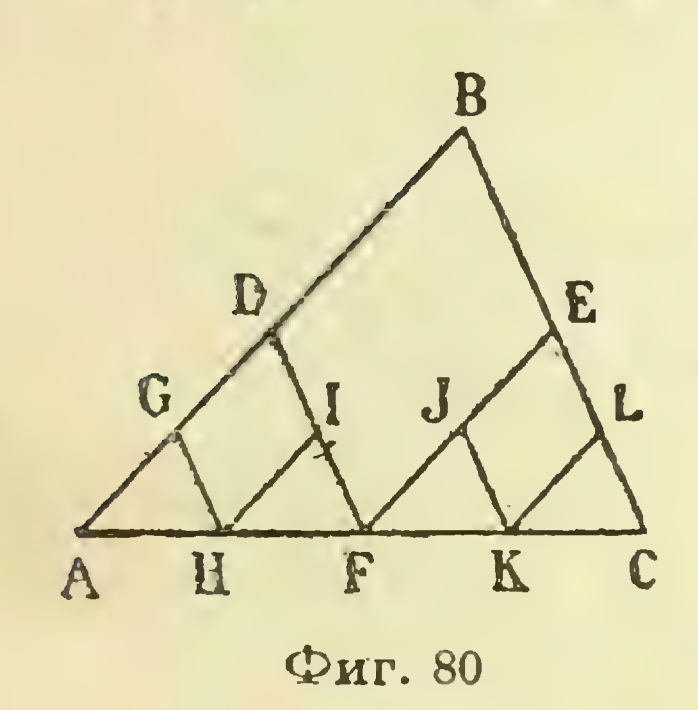
§ 2. — Ошибки въ разсужденіи.

Доказательство должно быть основано лишь на точныхъ опредѣленіяхъ. Паскаль насъ учитъ (De l'Esprit géométrique) „подставлять всегда мысленно опредѣленіе вмѣсто опредѣляемаго, чтобы не быть обманутымъ неопредѣленностью терминовъ, устраненной въ опредѣленіяхъ".

Съ другой стороны, надъ числами слѣдуетъ выполнять лишь дозволенныя операціи, и въ этомъ отношеніи нужно умѣть находить подъ маской безупречной логики слабое мѣсто вычисленія, приведшее къ нелѣпому результату.

Приведенные ниже примѣры выяснятъ всю важность этихъ замѣчаній.

I. Въ любомъ треугольникѣ одна изъ сторонъ равна суммѣ двухъ другихъ. Пусть будетъ ABC разсматриваемый треугольникъ и точки D, E, F — середины его сторонъ. Проведимъ прямыя DF, FE. Извѣстно, что $DF = \frac{BC}{2} = BE$ и $FE = \frac{AB}{2} = DB$. Поэтому длина ломаной линіи ABC та же, что и длина ломаной ADFEC.



Фиг. 80

Если взять теперь среднія точки G, H, I и J, K, L сторонъ двухъ треугольниковъ ADF и FEC, то можно показать, что

лом. лин. AGHIFJKLC = лом. лин. ADFEC = лом. лин. ABC.

Продолжая такъ безпредѣльно, увидимъ, что длина всѣхъ послѣдовательно образованныхъ ломаныхъ линій равна AB + BC.

Но длина отрѣзковъ, составляющихъ ломаныя линіи, постоянно уменьшается, ихъ концы все болѣе и болѣе приближаются къ основанію AC и *въ предѣлѣ периметръ ломаныхъ линій сливается съ прямой* AC. Слѣдовательно, $AB + BC = AC$.

Опроверженіе.—Предыдущій выводъ основанъ на ложномъ толкованіи термина „предѣлъ", точное опредѣленіе котораго таково: *Перемѣнная* величина L имѣетъ предѣломъ постоянную величину A, если абсолютная величина разности между величинами L и A можетъ сдѣлаться и оставаться меньше всякой напередъ заданной сколь угодно малой положительной величины.

Величинами L и A являются здѣсь соотвѣтственно периметръ перемѣнной ломаной линіи и длина стороны AC. Но L величина *постоянная*, а не перемѣнная, и разность между L и A также постоянна. Слѣдовательно, мы не находимся въ условіяхъ предыдущаго опредѣленія, и поэтому не удивительно, что мы пришли къ нелѣпому результату.

Замѣчаніе. — Можетъ показаться, что существуетъ нѣкоторая аналогія между предшествующимъ паралогизмомъ и опредѣленіемъ длины дуги круга. „Длина дуги круга есть предѣлъ, къ которому стремится периметръ ломаной линіи, вписанной въ эту дугу, когда стороны ломаной линіи стремятся къ нулю", что можно выразить короче: „въ предѣлѣ ломаная линія и дуга сливаются."

Но въ этомъ послѣднемъ случаѣ периметръ ломаной линіи есть величина перемѣнная, имѣющая предѣлъ, и этотъ предѣлъ, по условію, есть длина дуги.

Фиг. 81

II. Окружность круга равна его діаметру.—Пусть будетъ дана окружность центра O и діаметра $AB = \Delta$. Опишемъ на прямыхъ OA и OB, какъ на діаметрахъ, двѣ окружности центровъ C и D; сумма длинъ окружностей будетъ $\frac{\pi\Delta}{2} + \frac{\pi\Delta}{2} = \pi\Delta$, т. е. равна длинѣ первоначальной окружности.

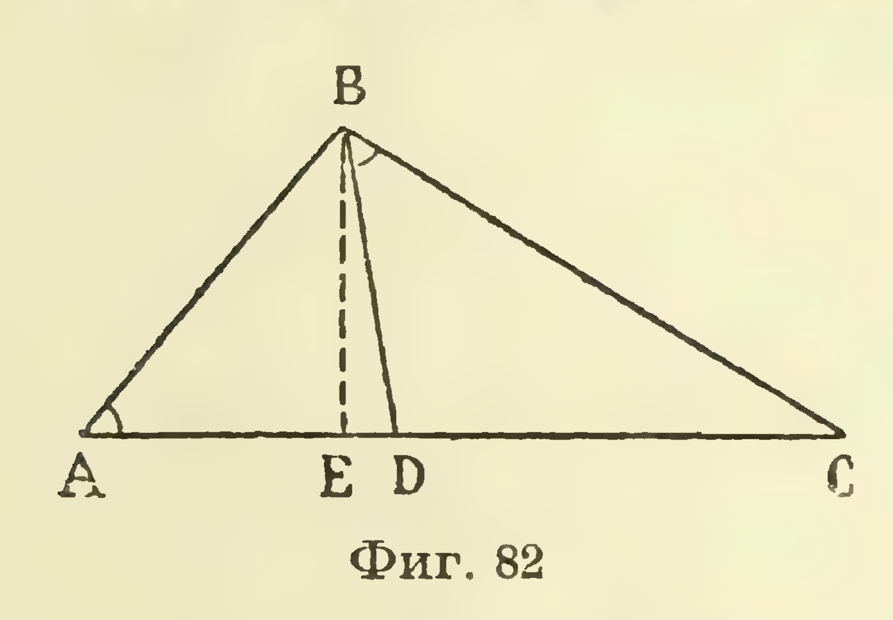
Опишемъ также на прямыхъ AC, CO, DO и DB четыре окружности, діаметрами которыхъ будетъ величина $\frac{\Delta}{4}$ и сумма длинъ которыхъ будетъ $4 \cdot \frac{\pi\Delta}{4}$, т. е. опять $\pi\Delta$.

Если такъ продолжать безпредѣльно, то длины окружностей каждой группы въ суммѣ всегда равны длинѣ окружности центра O; но такъ какъ ихъ діаметры безпредѣльно убываютъ, то *эти окружности сольются въ предѣлѣ съ прямой* AB, и мы найдемъ, что

$$\text{окр. центра } O = \text{діам. } AB.$$

Опроверженіе. — Можно доказать ложность этого разсужденія такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

III. — Часть прямолинейнаго отрѣзка равна всему отрѣзку, или иначе: **Часть равна цѣлому** (C[t] Coccoz. *Illustration du 12 janvier* 1895). — Пусть будетъ данъ какой-нибудь треугольникъ ABC, въ которомъ уголъ B есть наибольшій. Проведемъ прямую BD такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство $\angle CBD = \angle A$, и опустимъ на прямую AC перпендикуляръ BE. Изъ подобія равноугольныхъ треугольниковъ ABC и BDC слѣдуетъ, что



Фиг. 82

$$\frac{ABC}{BDC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD}^2}.$$

Кромѣ того, эти треугольники, имѣя одну и ту же высоту BE, относятся, какъ ихъ основанія AC и DC; слѣдовательно,

$$\frac{ABC}{BDC} = \frac{AC}{DC}.$$

Изъ двухъ предыдущихъ соотношенiй вытекаетъ равенство:

$$\frac{\overline{AB}^2}{AC} = \frac{\overline{BD}^2}{DC}. \qquad (1)$$

Съ другой стороны, извѣстная теорема позволяетъ написать:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \cdot EC, \qquad (\text{тр. } ABC)$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 - 2DC \cdot EC. \qquad (\text{тр. } BDC)$$

Подставивъ эти величины въ равенство (1), мы получимъ:

$$\frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \cdot EC}{AC} = \frac{\overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 - 2DC \cdot EC}{DC}.$$

Упрощая, получимъ послѣдовательно

$$AC + \frac{\overline{BC}^2}{AC} = DC + \frac{\overline{BC}^2}{DC},$$

$$\frac{\overline{BC}^2}{AC} - DC = \frac{\overline{BC}^2}{DC} - AC$$

и, наконецъ,

$$(\overline{BC}^2 - AC \cdot DC)\, DC = (\overline{BC}^2 - AC \cdot DC)\, AC. \qquad (2)$$

Дѣля оба члена на величину $\overline{BC}^2 - AC \cdot DC$, мы найдемъ, что $DC = AC$, т. е. что часть DC отрѣзка AC равна всему отрѣзку.

Опроверженіе. — Достаточно замѣтить, что въ равенствѣ (2) величина $\overline{BC}^2 - AC \cdot DC$ равна нулю, такъ какъ изъ подобія разсмотрѣнныхъ треугольниковъ слѣдуетъ, что

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}.$$

Но обѣ части равенства можно раздѣлить на одну и ту же величину при непремѣнномъ условіи, чтобы эта послѣдняя была отлична отъ нуля. Нелѣпость, къ которой мы пришли, вызвана тѣмъ, что мы раздѣлили обѣ части равенства (2) на величину, равную нулю.

Слѣдуетъ еще замѣтить, что равенству (2) можно придать видъ

$$(\overline{BC}^2 - AC \cdot DC)\ (AC - DC) = 0.$$

Каковы бы то ни были величины AC и DC, равенство (2) всегда удовлетворяется, такъ какъ первый множитель постоянно равенъ нулю. Слѣдовательно, изъ этого равенства никоимъ образомъ не вытекаетъ, что $AC - DC = 0$ или что $AC = DC$.



ПРИБАВЛЕНІЕ РЕДАКТОРА

Теорія головоломокъ содержитъ двѣ общія задачи, изъ которыхъ одна рѣшена въ текстѣ полностью (поскольку вопросъ касается прямолинейныхъ фигуръ), а другая оставлена незатронутой. Мы здѣсь пояснимъ первую и рѣшимъ вторую, ограничиваясь прямолинейными фигурами.

Задача первая. *Данную прямолинейную фигуру* F *требуется преобразовать (перекроить) въ другую данную прямолинейную фигуру* F_1, *равновеликую первой.*

Рѣшеніе. Разсмотримъ слѣдующіе пункты.

1. На стр. 27 показано, какъ *треугольникъ перекраивается въ параллелограммъ.*

2. Нетрудно *перекроить любой параллелограммъ* ABCD *въ прямоугольникъ:* мы можемъ, не ограничивая рѣшенія, предположить, что сторона AB не больше стороны AD и что A есть острый уголъ. Проекція AK стороны AB на AD меньше, чѣмъ AD и падаетъ на AD, а проекція DK_1 стороны CD на AD падаетъ на продолженіе AD. Отъ параллелограмма ABCD отрѣжемъ треугольникъ ABK и перенесемъ его въ положеніе CDK.

3. *Прямоугольникъ* ABCD *съ основаніемъ* AD $= a$ *можно перекроить въ прямоугольникъ съ основаніемъ, равнымъ* $\frac{a}{2}$. Для этого достаточно разрѣзать прямоугольникъ по прямой, соединяющей середины M и N сторонъ AD и BC, и перенести прямоугольникъ ABNM въ такое положеніе, при которомъ сторона AM сливается съ NC.

4. *Изъ двухъ равновеликихъ прямоугольниковъ* F $=$ ABCD *и* $F_1 = A_1B_1C_1D_1$ *можно одинъ перекроить въ другой, если*

между ихъ основаніями AD *и* A_1D_1 *существуетъ соотношеніе* $AD > A_1D_1 \geqslant \frac{1}{2} AD$. Наложимъ F_1 на F такъ, чтобы углы D и D_1 совпали и чтобы сторона A_1D_1 сливалась съ частью KD стороны AD. Прямоугольникъ F_1 будетъ занимать положеніе KDEG. Проведя прямыя AE и KC, найдемъ, что онѣ параллельны, ибо $\overline{DA} . \overline{DC} = \overline{DK} . \overline{DE}$ или $\overline{DA} : \overline{DK} = \overline{DE} : \overline{DC}$. Если прямая BC пересѣкается съ прямыми KG и AE соотвѣтственно въ точкахъ M и N, то $NC = AK < \frac{1}{2} AD \leqslant KD = MC$; слѣдовательно, прямая AE встрѣчаетъ *отрѣзокъ* MC въ точкѣ N и *отрѣзокъ* KM въ нѣкоторой точкѣ L. Прямоугольникъ F будетъ перекроенъ въ прямоугольникъ F_1, когда, отрѣзавъ отъ F треугольники AKL и ANB, мы перенесемъ ихъ соотвѣтственно въ положенія NCE и LEG. Обратное перенесеніе треугольниковъ приводитъ къ преобразованію F_1 въ F.

5. *Прямоугольникъ* F *съ основаніемъ* a *можно перекроить въ любой равновеликій ему прямоугольникъ* F_1 *съ основаніемъ* α. Пусть будетъ $\alpha < a$. Построимъ рядъ отрѣзковъ

$$\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \ldots, \frac{a}{2^n}, \frac{a}{2^{n+1}}, \ldots.$$

Въ этомъ ряду всегда найдутся два смежныхъ отрѣзка $\frac{a}{2^n}$ и $\frac{a}{2^{n+1}}$, между которыми заключается α. Пусть будетъ

$$\frac{a}{2^n} > \alpha \geqslant \frac{a}{2^{n+1}}.$$

Перекраиваемъ прямоугольникъ F въ прямоугольникъ Φ, имѣющій основаніе, равное $a : 2^n$, примѣняя n разъ методъ, указанный въ пунктѣ 3, а затѣмъ перекраиваемъ Φ въ F_1 по методу, указанному въ пунктѣ 4.

6. *Любой многоугольникъ* l *можно перекроить въ любой равновеликій ему многоугольникъ* m. Разрѣжемъ многоугольники на треугольники, перекроимъ треугольники въ параллелограммы (п. 1), параллелограммы въ прямоугольники (п. 2), прямоугольники въ прямоугольники λ и μ съ однимъ и тѣмъ же осно-

ваніемъ α, гдѣ α любой произвольно выбранный отрѣзокъ (п. 5). Эти прямоугольники, будучи равновелики и имѣя равныя основанія, равны. Приведя λ въ совпаденіе съ μ и разрѣзавъ λ на такія части, изъ какихъ составленъ прямоугольникъ μ, мы будемъ знать, какъ перекроить l въ m.

Задача вторая. *Даны прямолинейныя фигуры* F, f_1, $f_2, \ldots, f_n$ *въ конечномъ числѣ. Требуется опредѣлить,* ***возможно ли*** *составить фигуру* F *изъ фигуръ* $f_1, f_2, \ldots, f_n$, *не разрѣзая ихъ на части, и, если возможно, то какъ именно.*

Рѣшеніе. Въ столь общемъ видѣ поставленная задача можетъ быть рѣшена въ томъ только смыслѣ, что будетъ указанъ *конечный* рядъ испытаній, всегда приводящихъ къ ея рѣшенію. Итакъ, утверждается, что *всегда можно указать конечный рядъ испытаній, приводящихъ къ рѣшенію задачи.* Это предложеніе мы докажемъ индуктивно относительно числа n фигуръ f.

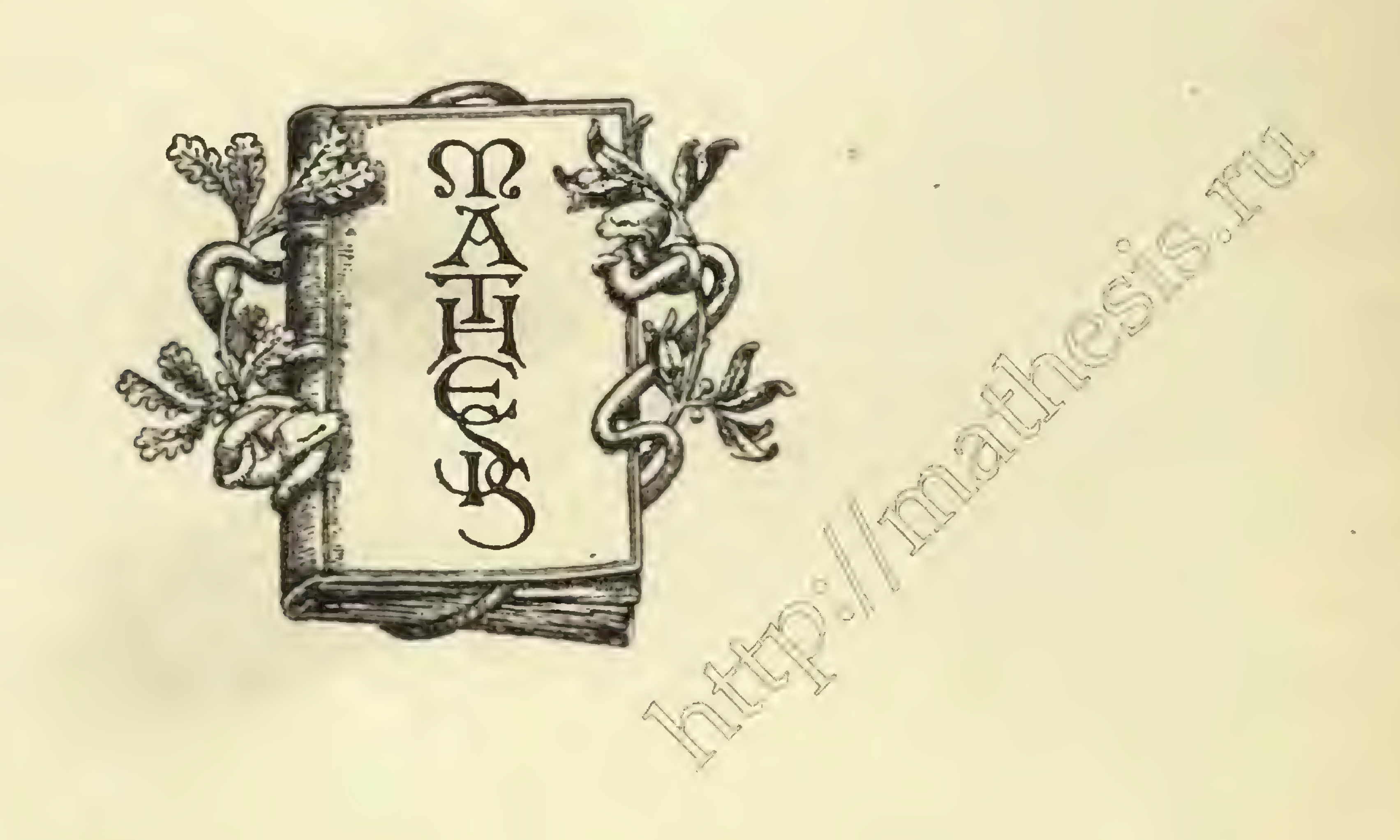
1. Пусть будетъ $n=1$. Вопросъ приводится къ опредѣленію того, конгруэнтна ли фигура f_1 фигурѣ F. Рѣшеніе вопроса потребуетъ не болѣе, чѣмъ $2m$ испытаній, гдѣ m есть число угловъ фигуры F. Мы будемъ накладывать одинъ изъ угловъ фигуры f_1 тою и другою стороною его плоскости на каждый изъ угловъ фигуры F. Если при всѣхъ этихъ наложеніяхъ фигуры f_1 и F не совпадутъ, то онѣ не конгруэнтны, если же онѣ конгруэнтны, то при одномъ изъ указанныхъ наложеній f_1 совпадетъ съ F.

2. Допустимъ теперь справедливость доказуемой теоремы для случая, когда число фигуръ f равно $n-1$, и докажемъ, что тогда теорема будетъ вѣрна и въ томъ случаѣ, когда число фигуръ f равно n.

Допустимъ, что можно составить изъ n фигуръ f фигуру F^1, конгруэнтную фигурѣ F. Наложивъ фигуру F_1 на фигуру F такъ, чтобы онѣ совпали, и обозначивъ черезъ A опредѣленную вершину и черезъ AB опредѣленную сторону фигуры F, мы найдемъ, что одна изъ сторонъ $\alpha\beta$ одной изъ фигуръ f (пусть

это будетъ f_k) совпадаетъ либо со стороной AB, либо съ ея частью AK, при чемъ сама фигура f_k составляетъ часть фигуры F. Будемъ поэтому пытаться накладывать каждую изъ фигуръ f на фигуру F такимъ образомъ, чтобы 1) накладываемая фигура составляла часть F и 2) чтобы одна изъ сторонъ накладываемой фигуры совпала со стороной AB или какою-либо ея частью, имѣющей начало въ избранной вершинѣ A. Всѣ эти попытки могутъ оказаться неудачными. Въ такомъ случаѣ фигура F не можетъ быть составлена изъ n данныхъ фигуръ f— и задача рѣшена. Число испытаній, о которыхъ мы только-что говорили, не превосходитъ двойного числа всѣхъ сторонъ m всѣхъ n фигуръ f, ибо каждую изъ фигуръ f можно накладывать на F тою или другою стороною накладываемой плоскости.

Положимъ, однако, что нѣкоторыя изъ нашихъ попытокъ, въ числѣ $\mu \leqslant 2m$, оказались удачными. Въ каждомъ изъ этихъ μ случаевъ фигура F будетъ частью покрыта одною изъ фигуръ f и остающуюся еще непокрытую часть Ф фигуры F еще нужно будетъ покрыть остальными $n-1$ фигурами f. По допущенію, требуется конечное число испытаній для рѣшенія вопроса о томъ, можно ли составить фигуру Ф изъ $n-1$ фигуръ f. Такимъ образомъ, рѣшеніе задачи, въ случаѣ n фигуръ f, приводится къ рѣшенію μ такихъ же задачъ, изъ коихъ каждая по допущенію рѣшается конечнымъ числомъ испытаній.





Книгоиздательство научныхъ и популярно-научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ.

Одесса, Новосельская, 66.

ЧИСТАЯ и ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

АДЛЕРЪ, А. ТЕОРІЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ПОСТРОЕНІЙ. Перев. съ нѣмецкаго подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* XXIV+325 стр. 8⁰. Съ 177 рис. 1910. Ц. 2 р. 25 к.

Это качество... дѣлаетъ книгу единственной на русскомъ языкѣ въ данной отрасли геометріи. *Современный міръ.*

АППЕЛЬ, П. проф. и **ДОТЕВИЛЛЬ, С.** проф. КУРСЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ. Введеніе въ изученіе физики и прикладной механики. Пер. съ фр. І. Левинтова подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.*

Вып. I (механика точки и геометрія массъ). XV+385 стр. 8⁰. Съ 136 черт. 1912. Ц. 2 р. 50 к.

Вып. II (механика системы) XV + 359 стр. 8⁰. Съ 87 черт. Ц. 2 р. 50 к.

Книга по содержащемуся въ ней матеріалу соотвѣтствуетъ университетскому курсу теоретической механики и представляетъ собой сокращенную переработку обширнаго трехтомнаго трактата *П. Аппеля* по теоритической механикѣ.

АРХИМЕДЪ, ГЮЙГЕНСЪ, ЛЕЖАНДРЪ, ЛАМБЕРТЪ. О КВАДРАТУРѢ КРУГА. Съ приложеніемъ исторіи вопроса, составл. проф. **Ф. Рудіо.** *(Библ. класс.).* Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. Бернштейна.* VIII+155 стр. 8⁰. Съ 21 черт. 1911. Ц. 1 р 20 к.

БОЛЬЦАНО, Б. ПАРАДОКСЫ БЕЗКОНЕЧНАГО. *(Библ. класс.).* Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. *И. В. Слешинскаго.* VIII+120 стр. 8⁰. Съ 12 черт. 1911. Ц. 80 к.

БОРЕЛЬ, Э. проф. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА. Въ обработкѣ проф. *В. Штеккеля.* Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ дополненіями прив.-доц. *В. Ф. Кагана.*

Ч. I. Ариѳметика и Алгебра. LXIV+434 стр. 8⁰. 1911 Ц. 3 р.

Ч. II. Геометрія. VIII+332 стр. 8⁰. Съ 403 черт. 1912. Ц. 2 р.

WEBER H., проф. и **WELLSTEIN J.**, проф. ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ Руководство для преподающихъ и изучающихъ элементарную математику. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *В. Кагана.*

Томъ I. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА и АНАЛИЗЪ, * обраб. проф. *Веберомъ.* XXIV+666 стр. 8⁰. Съ 38 черт. *2-е изд.* 1911 г. Ц. 4 р.

Вы все время видите передъ собой мастера своего дѣла, который съ любовью показываетъ великія творенія человѣческой мысли, извѣстныя ему до тончайшихъ подробностей. *Педагогическій Сборникъ.*

Томъ II. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРІЯ, составленная *Веберомъ, Вельштейномъ и Якобсталемъ.*

Книга I. ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ. * Состав. *I. Вельштейнъ.* XII+362 стр., больш. 8⁰. Съ 142 черт. и 5 рис. 1909. Ц. 3 р.

Особый интересъ представляетъ въ книгѣ г. Вельштейна своеобразное изложеніе не-евклидовой геометріи, а также изложеніе проективной геометріи. *Жур. Мин. Н. Пр.*

Книга II и III. ТРИГОНОМЕТРІЯ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ и СТЕРЕОМЕТРІЯ. Составили *Г. Веберъ и В. Якобсталь.* VIII+321 стр. больш. 8⁰. Съ 109 черт. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

ГЕЙБЕРГЪ, I. проф. НОВОЕ СОЧИНЕНІЕ АРХИМЕДА*. Посланіе Архимеда къ Эратосѳену о нѣкоторыхъ вопросахъ механики *(Библ. класс.)*. Перев. съ нѣм. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* XV+27 стр. 8⁰. Съ 15 рис. 1909. Ц. 40 к.

Математикамъ... будетъ весьма интересно познакомиться съ новой драгоцѣнной научной находкой... *Образованіе.*

ДЕДЕКИНДЪ, Р. проф. НЕПРЕРЫВНОСТЬ и ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА * *(Библ. класс.)*. Пер. съ нѣм. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*, съ присоед. его статьи: „Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ“. *2-е изд.* 40 стр. 8⁰ 1909. Ц. 40 к.

Небольшой по объему, но, такъ сказать, законодательный по содержанію трудъ... *Русская Школа.*

ДЗІОБЕКЪ, О. проф. КУРСЪ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ примѣч. проф. СПБ. высш. женск. курсовъ *Вѣры Шиффъ.*

Часть I. Аналитическая геометрія на плоскости. 390 стр. 8⁰. Съ 87 черт. 1912. Ц. 2 р. 50 к.

Часть II. Аналитическая геометрія въ пространствѣ. Печатается.

---

* *Изданія, отмѣченныя звѣздочкой, признаны Учен. Ком. Мин. Нар. Просв. подлежащими внесенію въ списокъ книгъ, заслуживающихъ вниманія при пополненіи учен. библіотекъ средн. учебн. заведеній.*

КАГАНЪ, В. прив.-доц. ЗАДАЧА ОБОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ ВЪ СОВРЕМЕННОЙ ПОСТАНОВКѢ. Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи на степень магистра чистой математики. 35 стр. 8⁰. 11 черт. 1908. Ц. 35 к.

КАГАНЪ, В. прив.-доц. ЧТО ТАКОЕ АЛГЕБРА?* 72 стр. 16⁰. 1910. Ц. 40 к.

Книжка написана яснымъ простымъ языкомъ и, несомнѣнно, вызоветъ къ себѣ интересъ. *Русская Мысль.*

КЛЕЙНЪ, Ф. проф. ВОПРОСЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ и ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. Лекціи, читанныя для учителей. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ дополн. прив.-доц. *В. Ф. Кагана* VIII+480 стр. 8⁰. 1912. Ц. 3 р.

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ИСЧИСЛЕНІЕ БЕЗКОНЕЧНО-МАЛЫХЪ.* Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+140 стр. 8⁰. Съ 18 черт. 1909. Ц. 1 р.

Книга проф. Ковалевскаго, несомнѣнно, прекрасное введеніе въ высшій анализъ. *Русская Школа.*

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО и ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЙ. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+496 стр. 8⁰. 1911. Ц. 3 р. 50 к.

Курсъ профессора боннскаго университета, несомнѣнно, является однимъ изъ лучшихъ по ясности и чрезвычайной строгости обоснованія одного изъ могущественныхъ методовъ современнаго анализа. *Совр. Міръ.*

КУТЮРА, Л. АЛГЕБРА ЛОГИКИ. Пер. съ фр. съ прибавленіями проф. *П. Слешинскаго.* IV+107+XIII стр. 8⁰. 1909. Ц. 90 к.

КЭДЖОРИ, Ф. проф. ИСТОРІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (съ указаніями на методы преподаванія) *. Пер. съ англ. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* VIII+368 стр. 8⁰. Съ рис. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

Книга читается съ большимъ интересомъ и весьма полезна... Мы настоятельно рекомендуемъ „Исторію элем. мат.“ Кэджори. *Вѣстн. Восп.*

МАРКОВЪ, А. акад. ИСЧИСЛЕНІЕ КОНЕЧНЫХЪ РАЗНОСТЕЙ. Въ 2 частяхъ. Изданіе 2-е, исправленное и дополненное. VIII+274 стр. 8⁰. 1911. Ц. 2 р. 25 к.

НЕТТО, Е. проф. НАЧАЛА ТЕОРІИ ОПРЕДѢЛИТЕЛЕЙ. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+156 стр. 8⁰. 1912. Ц. 1 р. 20 к.

ПУАНКАРЕ, Г. проф. НАУКА и МЕТОДЪ. Пер. съ франц. *И. Брусиловскаго* подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* VIII+384 стр. 16⁰. 1910. Ц. 1 р. 50 к.

... книгу Пуанкаре можно рекомендовать особому вниманію преподавателей математики и естествознанія. *Вѣстникъ Воспитанія.*

РОУ, С. ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ УПРАЖНЕНІЯ СЪ КУСКОМЪ БУМАГИ. Пер. съ англ. XVI+173 стр. 16⁰. Съ 87 рис. 1910. Ц. 90 к.

Производитъ впечатлѣніе гармоничнаго цѣлаго и читается съ большимъ интересомъ. *Русская Школа.*

РУССКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛІОГРАФІЯ. Вып. I. Списокъ сочин. по чистой и прикл. математикѣ, напечат. въ Россіи въ 1908 г. Подъ ред. проф. *Д. М. Синцова.* 76 стр. 8⁰. 1911. Ц. 60 к.

ЦИММЕРМАНЪ, Б. проф. ОБЪЕМЪ ШАРА, ШАРОВОГО СЕГМЕНТА и ШАРОВОГО СЛОЯ. 34 стр. 16⁰. Съ 6 черт. 1908. Ц. 25 к.

Распространеніе подобнаго рода элементарныхъ монографій среди учащихся весьма желательно. *Русская Школа.*

ШУБЕРТЪ, Г. проф. МАТЕМАТИЧЕСКІЯ РАЗВЛЕЧЕНІЯ и ИГРЫ. Пер. съ нѣм. *І. Левинтова*, подъ ред., съ прим. и доб. „В. О. Ф. и Эл. Мат.“ XIV+358 стр. 16⁰. Со мног. табл. 1911. Ц. 1 р. 40 к.

ФИЗИКА

АБРАГАМЪ, Г. проф. СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ.* Пер. съ франц. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга.*

Часть I: XVI+272 стр. 8⁰. Свыше 300 рис. *2-е изд.* 1909. Ц. 1 р. 50 к.

Систематически составленный сводъ наиболѣе удачныхъ, типичныхъ и поучительныхъ опытовъ. *Вѣстникъ и Библіотека Сомообразованія*

Часть II: 434+LXXV стр. 8⁰. Свыше 400 рис. *2-е изд* 1910 г. Ц. 2 р. 75 к.

Мы надѣемся, что разбираемый трудъ станетъ настольной книгой каждой физической лабораторіи въ Россіи. *Русская Мысль.*

АУЭРБАХЪ, Ф. проф. ЦАРИЦА МІРА и ЕЯ ТѢНЬ. * Общедоступное изложеніе основаній ученія объ **энергіи и энтропіи.** Пер. съ нѣм. VIII+50 стр. 8⁰. *5-е изданіе* 1911. Ц. 40 к.

Слѣдуетъ признать брошюру Ауэрбаха чрезвычайно интересной *Ж. М. Н. Пр.*

БРАУНЪ, Ф. проф. МОИ РАБОТЫ ПО БЕЗПРОВОЛОЧНОЙ ТЕЛЕГРАФІИ и ПО ЭЛЕКТРООПТИКѢ. Рѣчь, произн. по случаю полученія Нобелевской преміи, съ дополн. автора. Пер. съ рукописи *Л. Мандельштама* и *Н. Папалекси*, со вступит. статьей переводчик. XIV+92 стр. 16⁰. Съ 25 рис. и портр. авт. 1911. Ц. 70 к.

БРУНИ, К. проф. ТВЕРДЫЕ РАСТВОРЫ *. Пер. съ итал. подъ ред. „*Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.*“ 37 стр. 16⁰. 1909. Ц. 25 к.

ВЕТГЭМЪ, В. проф. СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТІЕ ФИЗИКИ *. Пер. съ англ. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга* и прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* Съ Прилож. рѣчи *А. Бальфура.* НѢСКОЛЬКО МЫСЛЕЙ О НОВОЙ ТЕОРІИ ВЕЩЕСТВА. VIII+277 стр. 8°. Съ 5 порт. и 39 рис. *2-е изд.* 1912. Ц. 2 р.

...рисуетъ читателю дѣйствительно захватывающую картину грандіозныхъ завоеваній человѣческаго генія. *Современный Міръ.*

ВЕЙНБЕРГЪ, Б. П. проф. СНѢГЪ, ИНЕЙ, ГРАДЪ, ЛЕДЪ и ЛЕДНИКИ *. IV+127 стр. 8°. Съ 137 рис. и 2 фототип. табл. 1909. Ц. 1 р.

„Mathesis" можетъ гордиться этимъ изданіемъ. *Ж. М. Н. Пр.*

ВИНЕРЪ, О. проф. О ЦВѢТНОЙ ФОТОГРАФІИ и РОДСТВЕННЫХЪ ЕЙ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХЪ ВОПРОСАХЪ *. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.* VI+69 стр. 8°. Съ 3 цвѣт. табл. 1911. Ц. 60 к.

ГЕРНЕТЪ, В. А. ОБЪ ЕДИНСТВѢ ВЕЩЕСТВА. 46 стр. 16°. Ц. 25 к.

ЗЕЕМАНЪ, П. проф. ПРОИСХОЖДЕНІЕ ЦВѢТОВЪ СПЕКТРА. Съ прил. статьи *В. Ритца* „Линейные спектры и строеніе атомовъ". Пер. съ нѣм. 50 стр. 16°. Ц. 30 к.

КАЙЗЕРЪ, Г. проф. РАЗВИТІЕ СОВРЕМЕННОЙ СПЕКТРОСКОПІИ. * Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Ф. и Эл. М."* 45 стр. 16°. 1910. Ц. 25 к.

Одинъ изъ лучшихъ обзоровъ... Онъ содержитъ, въ сжатомъ видѣ, исторію открытія спектральнаго анализа и дальнѣйшаго ея развитія до нашихъ дней. *Журн. Мин. Н. Пр.*

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. ОСНОВЫ МЕТЕОРОЛОГІИ. * XVI+527 стр. больш. 8°. Съ 199 рис., 2 цвѣтн. и 3 черн. табл. 1910. Ц. 4 р.

Честь и слава „Mathesis" за изданіе этой прекрасной книги, которою можетъ гордиться русская наука. *Ж. М. Н. Пр.*

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. ФИЗИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ НАШЕЙ ПЛАНЕТЫ НА ОСНОВАНІИ СОВРЕМЕННЫХЪ ВОЗЗРѢНІЙ. * 46 стр. 8°. 2-е изданіе, испр. и дополн. 1908. Ц. 40 к.

Рѣдко можно встрѣтить изложеніе, въ которомъ въ такой степени соединялась бы высокая научная эрудиція съ картинностью и увлекательностью рѣчи. *Педагогическій Сборникъ.*

КОНЪ, Э. проф. и **ПУАНКАРЕ Г.**, акад. ПРОСТРАНСТВО и ВРЕМЯ СЪ ТОЧКИ ЗРѢНІЯ ФИЗИКИ. Пер. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат."*. 81 стр. 16°. Съ 11 рис. 1912. Ц. 40 к.

ЛАКУРЪ П. и **АППЕЛЬ Я.** ИСТОРИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. * Пер. съ нѣм. подъ ред. *Вѣстн. Оп. Физики и Эл. Мат.*“. Въ 2-хъ томахъ больш. формата 892 стр. Съ 799 рисун. и 6 отд. цвѣтн. табл. 1908. Ц. 7 р. 50 к.

Нельзя не привѣтствовать этого интереснаго изданія... Книга читается легко; содержитъ весьма удачно подобранный матеріалъ и обильно снабжена хорошо выполненными рисунками. Переводъ никакихъ замѣчаній не вызываетъ. *Ж. М. Н. Пр*

ЛЕМАНЪ, О. проф. ЖИДКІЕ КРИСТАЛЛЫ и ТЕОРІИ ЖИЗНИ. Пер. съ нѣм. *П. В. Казанецкаго.* VIII+43 стр. 8°. Съ 30 рис. 1908. Ц. 40 к.

.... весьма кстати является краткая сводка главныхъ фактовъ, сдѣланная проф. Леманомъ. *Педагогическій Сборникъ.*

ЛИНДЕМАНЪ, Ф. проф. СПЕКТРЪ и ФОРМА АТОМОВЪ. Рѣчь ректора Мюнхенскаго универс. 23 стр. 16°. *2-е изд.* Ц. 15 к.

ЛОДЖЪ, О. проф. МІРОВОЙ ЭѲИРЪ. Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Д. Д. Хмырова.* VI+216 стр. 16°. Съ 19 рис. 1911. Ц. 80 к.

ЛОРЕНЦЪ, Г. проф. КУРСЪ ФИЗИКИ. * Пер. съ нѣм подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.* Съ добавленіями автора къ русскому изданію.

Т. I. VIII+356 стр. бол. 8°. Съ 236 рис. *2-изд.* 1912. Ц. 2 р. 75 к.

Т. II. VIII+466 стр. больш. 8°. Съ 257 рис. 1910. Ц. 3 р. 75 к.

Съ появленіемъ этого перевода русская литература обогатилась превосходнымъ курсомъ физики. *Ж. М. Н. Пр.*

МАЙКЕЛЬСОНЪ, А. проф. СВѢТОВЫЯ ВОЛНЫ и ИХЪ ПРИМѢНЕНІЯ. Перевела съ англ. *В. О. Хвольсонъ* подъ ред. заслуж. проф. *О. Д. Хвольсона* съ дополн. статьями и примѣч. редактора. VIII+192 стр. Съ 108 рис и 3 цвѣтн. табл. 1912 Ц. 1 р. 50 к.

МОРЕНЪ, Ш. ФИЗИЧЕСКІЯ СОСТОЯНІЯ ВЕЩЕСТВА. Пер. съ франц. подъ ред. проф. *Л. В. Писаржевскаго.* VIII+224 стр. 8°. Съ 21 рис. 1912. Ц. 1 р. 40 к.

ПЕРРИ, ДЖ. проф. ВРАЩАЮЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ. * Публ. лекція Съ добавл. статьи проф. *Б. Доната.* „Волчокъ и его будущее въ техникѣ“. Пер. съ англ. и фр. VIII+116 стр. 8°. Съ 73 рис. *3-е изданіе.* 1912. Ц. 60 к.

Книжка, воочію показывающая, какъ люди истиннаго знанія, не цеховой только науки, умѣютъ распоряжаться научнымъ матеріаломъ при его популяризаціи. *Русская Школа.*

ПЛАНКЪ, М. проф. ОТНОШЕНІЕ НОВѢЙЩЕЙ ФИЗИКИ КЪ МЕХАНИСТИЧЕСКОМУ МІРОВОЗЗРѢНІЮ. Пер. съ нѣм. *І. Левинтова* подъ ред. *„Вѣст. Оп. Ф. и Эл. М.“* 42 стр. 16° 1911. Ц. 25 к.

РАМЗАЙ, В. проф. БЛАГОРОДНЫЕ и РАДІОАКТИВНЫЕ ГАЗЫ. Пер. подъ ред. *„Вѣстн. О. Ф. и Э. М.“*. 37 стр. 16°. Съ 16 рис. 1909. Ц. 25 к.

РИГИ, А. проф. СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРІЯ ФИЗИЧЕСКИХЪ ЯВЛЕНІЙ. * (Іоны, электроны, радіоактивность). Пер. съ 3 итальян. изданія. VIII+146 стр. 8°. Съ 21 рис 1910. *2-е изд.* Ц. 90 к.

Книгу Риги можно смѣло рекомендовать образованному человѣку, какъ лучшее имѣющееся у насъ изложеніе новѣйшихъ взглядовъ на обширную область физическихъ явленій. *Педагогическій Сборникъ.*

РИГИ, А проф. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРИРОДА МАТЕРІИ. * Вступительная лекція. Пер. съ итальян. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Ф. и Эл. Мат.“*. 28 стр. 8°. *2-е изд.* 1911. Ц. 30 к.

Эта прекрасная рѣчь обладаетъ всѣми преимуществами многочисленныхъ популярныхъ сочиненій знаменитаго профессора Болонькаго университета. *Ж. М. Н. Пр.*

СЛАБИ, А. проф. БЕЗПРОВОЛОЧНЫЙ ТЕЛЕФОНЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. 28 стр. 8°. Съ 23 рис. 1909. Ц. 30 к.

СЛАБИ, А. проф. РЕЗОНАНСЪ и ЗАТУХАНІЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХЪ ВОЛНЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. 41 стр. 8°. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

Обѣ брошюры принадлежатъ перу большого знатока предмета и выдающагося самостоятельнаго работника въ области практическаго примѣненія электрическихъ волнъ. *Педагогическій Сборникъ.*

СОДДИ, Ф. проф. РАДІЙ и ЕГО РАЗГАДКА. * Пер. съ англ. подъ ред. прив-доц. *Д. Хмырова.* VII+190 стр. 8°. Съ 31 рис. 1910. Ц. 1 р. 25 к.

... авторъ въ увлекательномъ изложеніи вводитъ читателя въ необыкновенно заманчивую область... *Педагогическій Сборникъ.*

ТОМСОНЪ Дж. Дж. проф. КОРПУСКУЛЯРНАЯ ТЕОРІЯ ВЕЩЕСТВА. Пер. съ англ. *І. Левинтова* подъ ред. *„Вѣст О. Ф. и Э. М.“*. VIII+162 стр. 8°. Съ 29 рис. 1910. Ц. 1 р. 20 к

ТОМПСОНЪ, СИЛЬВАНУСЪ, проф. ДОБЫВАНІЕ СВѢТА * Общедост. лекція для рабочихъ, прочит. на собраніи Брит. Ассоціаціи 1906. Пер. съ англ. VIII+88 стр. 16°. Съ 28 рис. 1909. Ц. 50 к.

Въ этой весьма интересно составленной рѣчи собранъ богатый матеріалъ по вопросу добыванія свѣта. *Ж. М. Н. Пр.*

УСПѢХИ ФИЗИКИ. Сборникъ статей подъ ред. *„Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“.*

Выпускъ I. * VIII+148 стр. 8°. Съ 41 рис. и 2 табл. *изд. 3-е.* 1909. Ц. 75 к.

Изящно изданный и недорогой сборникъ прочтется каждымъ интересующимся съ большимъ интересомъ, *Вѣстникъ Знанія.*

Выпускъ II. IV+204 стр. съ 50 рис. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

ХИМІЯ.

МАМЛОКЪ, Л. д-ръ. СТЕРЕОХИМІЯ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+164 стр. 8°. Съ 58 рис. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

РАМЗАЙ, В. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ИЗУЧЕНІЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ХИМІИ. Пер. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+76 стр. 16°. 1910. Ц. 40 к.

Главный интересъ обзора конечно въ томъ, что онъ сдѣланъ крупнымъ самостоятельнымъ изслѣдователемъ въ этой области. *Педагог. Сборн.*

СМИТЪ, А. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ НЕОРГАНИЧЕСКУЮ ХИМІЮ. Пер. англ. подъ ред. *П. Г. Меликова.* XVI+840 стр. 8°. Съ 107 рис. 1911. Ц. 3 р. 50 к.

Такіе первокласные ученые, какъ Лёбъ, Оствальдъ и др. признали что „Введеніе въ неорганическую химію“ Смита обогащаетъ учебную литературу и въ ряду многочисленныхъ руководствъ по химіи должно занять особое, значительное мѣсто. *Рѣчь.*

ШЕЙДЪ, К. ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ ДЛЯ ЮНОШЕСТВА. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *Е. С. Ельчанинова.* IV+192 стр. 8°. Съ 79 рис. 1907. Ц. 1 р. 20 к.

ШТОКЪ, А. проф. и **ШТЕЛЛЕРЪ,** прив.-доц. ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО КОЛИЧЕСТВЕННОМУ АНАЛИЗУ. Пер. съ нѣм. лабор. Новор. Унив. *А. І. Коншина* подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* Пер. съ нѣм. VIII+172 стр. 8°. Съ 37 рис. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

АСТРОНОМІЯ.

АРРЕНІУСЪ, Св. проф. ОБРАЗОВАНІЕ МІРОВЪ *. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *К. Д. Покровскаго.* VIII+200 стр. 8° Съ 60 рис. *2-е изд.* 1912. Ц. 1 р. 75 к.

Книга чрезвычайно интересна и богата содержаніемъ. *Педагог. Сборн.*

АРРЕНІУСЪ, Св. проф. ФИЗИКА НЕБА *. **Пер. съ нѣм. подъ** ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* VIII+250 стр. 8° **Съ 68 рис. Черн.** и спектр. таблицы. 1905. Изданіе распродано.

Научность содержанія, ясность и простота изложенія и превосходный переводъ соперничаютъ другъ съ другомъ *Русская Мысль.*

БОЛЛЪ, Р. С. проф. ВѢКА и ПРИЛИВЫ. **Пер. съ англ подъ ред.** прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* 104 **стр. 8°.** Съ 4 **рис. и** 1 **табл. Ц. 75 к.**

.....настоящее изданіе „Mathesis" слѣдуетъ привѣтствовать наравнѣ съ прочими, какъ почтенный, заслуживающій распространенія и серьезнаго вниманія, вкладъ въ русскую науку. *Русская Школа.*

ВИХЕРТЪ, Э. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ГЕОДЕЗІЮ * **Пер. съ нѣм. IV+95 стр. 16°.** Съ 14 рис. *2-е изд.* 1912. **Ц. 35 к.**

Излагаетъ основы низшей геодезіи, имѣя въ виду пользованіе ею въ школѣ въ качествѣ практическаго пособія.... Изложеніе очень сжато, но полно и послѣдовательно. *Вопросы Физики.*

ГРАФФЪ, К. КОМЕТА ГАЛЛЕЯ *. Пер. съ нѣм. VIII+71 стр. **16°.** Съ 13 рис. и 2 отд. табл. Изд. второе испр. и доп. 1910. Ц. 30 к.

Брошюра Граффа хорошо выполняетъ свое назначеніе. *Педаг. Сбор.*

ГАЛЕЕВА КОМЕТА ВЪ 1910 ГОДУ. *Общедоступное изданіе.* Содержаніе: О вселенной—О кометахъ—О кометѣ Галлея. 32 стр. **8°.** Съ 12 иллюстраціями. 1910. **Ц. 12 к.**

ЛОВЕЛЛЪ, П. проф. МАРСЪ и ЖИЗНЬ НА НЕМЪ. **Пер. съ англ.** подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* XXI+272 стр. 8°. Со многими рис. и 1 цвѣтн. табл. 1912. **Ц. 2 р.**

НЬЮКОМЪ, С. проф. АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ *. **Пер.** съ англ. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* XX+288 стр. 8°. Съ порт. автора, 64 рис. и 1 табл. *2-е изд.* 1911. **Ц. 1 р. 50 к.**

Вполнѣ научно, и совершенно доступно, и изящно написанная книга... переведена и издана очень хорошо. *Вѣстникъ Воспитанія.*

НЬЮКОМЪ, С. проф. ТЕОРІЯ ДВИЖЕНІЯ ЛУНЫ. (Исторія и современное состояніе этого вопроса). 26 стр. 16°. **Ц. 20 к.**

ФУРНЬЕ ДАЛЬБЪ. ДВА НОВЫХЪ МІРА. 1. Инфра-міръ. 2. Супра-міръ. Пер. съ англ. VIII+119 стр. 8°. Съ 1 рис. и 1 табл. **1911. Ц. 80 к.**

БІОЛОГІЯ.

ВЕРИГО, Б. проф. ЕДИНСТВО ЖИЗНЕННЫХЪ ЯВЛЕНІЙ. (*Основы общей біологіи. I.*). VIII+276 стр. Съ 81 рис. 1912. Ц. 2 р

ЛЁБЪ, Ж. проф. ДИНАМИКА ЖИВОГО ВЕЩЕСТВА. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В Завьялова.* VIII+352 стр. 8°. Съ 64 рис. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

Классическая книга Лёба, отъ чтенія которой трудно оторваться, устанавливаетъ вѣхи достигнутаго въ познаніи динамики живого вещества. *Русское Богатство.*

ЛЁБЪ, Ж. проф. ЖИЗНЬ. Пер. съ нѣм. 30 стр. 8°. 1912. Ц. 30 к.

УШИНСКІИ, Н. проф. ЛЕКЦІИ ПО БАКТЕРІОЛОГІИ VIII+135 стр. 8°. Съ 34 черн и цвѣтн рис. на отдѣльн. табл. 1908. Ц. 1 р. 50 к.

VARIA.

ГАМПСОМЪ-ШЕФЕРЪ. ПАРАДОКСЫ ПРИРОДЫ. *. Книга для юношества, объясняющая явленія, которыя находятся въ противорѣчіи съ повседневнымъ опытомъ. Пер. съ нѣм VIII+193 стр. 8°. Съ 67 рис. Ц. 1 р. 20 к.

Матеріалъ подобранъ интересный. *Журн. М Н. Пр.*

ГАССЕРТЪ, К. проф. ИЗСЛѢДОВАНІЕ ПОЛЯРНЫХЪ СТРАНЪ История путешествій къ сѣверному и южному полюсамъ съ древнѣйшихъ временъ до настоящаго времени Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ дополн. проф. *Г. И. Танфильева.* XII+216 стр. 8°. Съ двумя цвѣтн. картами. 1912. Ц. 1 р. 50 к.

ГРОТЪ, П. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ХИМИЧЕСКУЮ КРИСТАЛЛОГРАФІЮ. Пер. съ нѣм. І. Левинтова подъ ред. проф. *М. Д. Сидоренко.* VIII+112 стр. 8°. Съ 6 черт. 1912 Ц. 80 к.

НИМФЮРЪ, Р. ВОЗДУХОПЛАВАНІЕ. * Научныя основы и техническое развитіе. Пер. съ нѣм. VIII+161 стр. 8°. Съ 52 рис. 1910 Ц. 90 к.

Въ книгѣ собранъ весьма обширный описательный матеріалъ. *Ж. М Н. Пр.*

СНАЙДЕРЪ, К. проф. КАРТИНА МІРА ВЪ СВѢТѢ СОВРЕМЕННАГО ЕСТЕСТВОЗНАНІЯ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+193 стр. 8°. Съ 16 отд. порт. 1909. Ц. 1 р. 50 к.

Книга касается интереснѣйшихъ вопросовъ о природѣ. *Пед. Сборн.*

ТРОМГОЛЬТЪ, С. ИГРЫ СО СПИЧКАМИ. Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16°. Свыше 250 рис. и черт. 2-е изд. 1912. Ц. 50 к.

ШМИДЪ, Б. проф. ФИЛОСОФСКАЯ ХРЕСТОМАТІЯ. Пер. съ нѣм. *Ю. А. Говсьева*, подъ ред. и съ пред. проф *Н. Н. Ланге.* VIII+172 стр 8°. 1907. Ц. 1 р.

...Для человѣка, занятаго самообразованіемъ и немного знакомаго съ философіей и наукой, она (книга) даетъ разнообразный и интересный матеріалъ. *Вопросы философіи и психологіи.*

Изданія, вышедшія въ свѣтъ послѣ отпечатанія приложеннаго каталога.

ВЕРИГО, Б. проф. БІОЛОГІЯ КЛѢТКИ, КАКЪ ОСНОВА УЧЕНІЙ О ЗАРОДЫШЕВОМЪ РАЗВИТІИ и РАЗМНОЖЕНІИ. IV+336 стр. 8⁰. Съ 60 рис. 1913. Ц. 2 р. 50 к.

ДЗІОБЕКЪ, О. проф. КУРСЪ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ. *Часть 2-я.* Аналитическая геометрія въ пространствѣ. Пер. съ нѣм. подъ редакц. проф. С.-П.-Б. высш. женскихъ курсовъ *В. І. Шиффъ.* VIII+356 стр. 8⁰. Съ 36 черт. 1912 г. Ц. 2 р. 50 к.

МИ, Г. профессоръ. КУРСЪ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА и МАГНИТИЗМА. Пер. съ нѣм. подъ ред. заслужен. проф. *О. Д. Хвольсона.* Вып. I и II. Подписная цѣна на все изданіе (4 выпуска) 5 руб.

ПЁШЛЬ, В. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ КОЛЛОИДНУЮ ХИМІЮ. Очеркъ коллоидной химіи для учителей, врачей и студентовъ. Пер. съ нѣм. *А. С. Комаровскаго,* съ пред. проф. *П. Г. Меликова,* VIII+86 стр. 8⁰. Ц. 75 к.

ПОЙНТИНГЪ, ДЖ. проф. ДАВЛЕНІЕ СВѢТА. Пер. съ англ. подъ ред. *„Вѣстн Оп. Физ. и Эл. Мат."* 128+II стр. 16⁰. Съ 42 рис. 1912 г. Ц. 50 к.

РУССКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛІОГРАФІЯ. Вып. II. За 1909 годъ. Подъ ред. проф. *Д. М. Синцова.* XVI+92 стр. 8⁰. 1912. Ц. 75 к.

ТРЕЛЬСЪ-ЛУНДЪ, проф. НЕБО И МІРОВОЗЗРѢНІЕ ВЪ КРУГОВОРОТѢ ВРЕМЕНЪ. Пер. съ нѣм. IV+233 стр. 8⁰ 1912 г. Ц. 1 р. 50 к.

УСПѢХИ ХИМІИ. Сборникъ статей о важнѣйшихъ изслѣдованіяхъ послѣдняго времени въ общедоступномъ изложеніи подъ ред. *„В. Оп. Ф. и Эл. Мат."* Вып. I, VIII+240 стр. 8⁰ Съ 83 рис. 1912 г. Ц. 1 р. 50 к

УСПѢХИ БІОЛОГІИ. Сборникъ статей о важнѣйшихъ изслѣдованіяхъ послѣдняго времени. Вып. I. Подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* IV+244 стр. 8⁰. Съ 24 рис. Ц. 1 р. 50 к.

ФИЛИППОВЪ, А. О. ЧЕТЫРЕ АРИѲМЕТИЧЕСКІЯ ДѢЙСТВІЯ. Числа натуральныя. VIII+88 стр. 8⁰ 1912 г. Ц. 70 к.

ЦЕНТНЕРШВЕРЪ, М. Г. ОЧЕРКИ ПО ИСТОРІИ ХИМІИ. Популярно-научныя лекціи. XVI+318 стр. 8⁰. Съ 83 рис. 1912 г. Ц. 2 р. 20 к.

ЩУКАРЕВЪ, А. проф. ПРОБЛЕМЫ ТЕОРІИ ПОЗНАНІЯ въ ихъ приложеніяхъ къ вопросамъ естествознанія и въ разработкѣ его методами. IV+137 стр. 8⁰. 1913 г. Ц. 1 р.

Печатаются и готовятся къ печати.

АНДУАЙЕ, проф. КУРСЪ АСТРОНОМІИ. Пер. съ франц.

БАХМАНЪ, проф. ОСНОВЫ НОВѢЙШЕЙ ТЕОРІИ ЧИСЕЛЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.*

БРАВЕ МАТЕМАТИЧЕСКІЯ НАЧАЛА КРИСТАЛЛОГРАФІИ.

ВЕРИГО, Б. Ф. проф. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ БІОЛОГІИ. III. „Современныя теоріи эволюціи въ мірѣ животныхъ и растеній“.

ГИЛЬБЕРТЪ, Д. проф. ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ. Пер. съ нѣм.

ДАННЕМАННЪ, Ф. проф. КРАТКАЯ ИСТОРІЯ ЕСТЕСТВОЗНАНІЯ. Пер. съ нѣмецкаго подъ ред. проф. С.-П.-Б. унив. *И. И. Боргмана.*

ЕВКЛИДЪ. ПЕРВЫЯ ШЕСТЬ КНИГЪ „НАЧАЛЪ“. Переводъ проф. *Д. М. Синцова* и прив.-доц. *С. Н. Бернштейна.*

КАЛРКЪ, А. ИСТОРІЯ АСТРОНОМІИ XIX СТОЛѢТІЯ. Переводъ съ англ. подъ ред. прив.-доц. С.-П.-Б. унив. *В. Серафимова.*

КЛААЧЪ, Г. проф. ПОЛОЖЕНІЕ ЧЕЛОВѢКА ВЪ ПРИРОДѢ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. Д. Ласкарева.*

КОЛЬРАУШЪ, Ф. проф. КРАТКОЕ РУКОВОДСТВО КЪ ПРАКТИЧЕСКИМЪ ЗАНЯТІЯМЪ ПО ФИЗИКѢ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.*

КОРБИНЪ, Т. СОВРЕМЕННЫЕ УСПѢХИ ТЕХНИКИ. Пер. съ англ.

ЛАДЕНБУРГЪ, А. проф. ЛЕКЦІИ ПО ИСТОРІИ ХИМІИ ОТЪ ЛАВУАЗЬЕ ДО НАШИХЪ ДНЕЙ. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *Е. С. Ельчанинова.*

ЛАГРАНЖЪ, І. ПРИБАВЛЕНІЯ КЪ „ЭЛЕМЕНТАМЪ АЛГЕБРЫ“ ЭЙЛЕРА. Неопредѣленный анализъ. Переводъ съ французскаго подъ редакціей приватъ-доцента *С. О. Шатуновскаго.*

ЛОММЕЛЬ, Е. проф. Курсъ опытной физики. Пер. съ нѣм.